Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2018/19

Elettricita' e Magnetismo

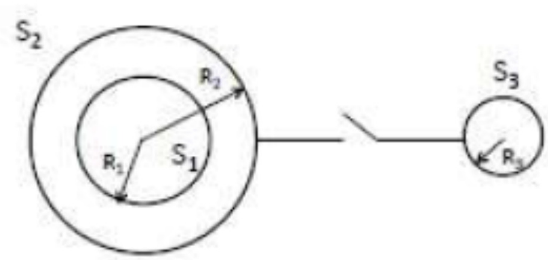
Prova scritta – 27/03/2019

Problema 1

Su due conduttori sferici concentrici S_1 e S_2, molto sottili e cavi, con raggi $R_1 = 10\ cm$ e $R_2 = 20\ cm$, sono depositate le cariche $q_1 = -2\ 10^{-8}\ C$, $q_2 = +\ 5\ 10^{-8}\ C$.

a) Trovare la differenza di potenziale fra S_1 e S_2

Un terzo conduttore S_3 di raggio $R_3 = 5\ cm$, molto lontano dagli altri due, viene messo in contatto con S_2 tramite un filo conduttore.



Trovare:

b) Il potenziale riferito all'infinito di S_2 e S_3
c) I campi elettrostatici E_2 e E_3 vicini alla superficie di S_2 e S_3

$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$, pot. dovuto a q_2 costante entro S_2, inclusa S_1

$\rightarrow \Delta V$ dovuto solo a q_1

$\rightarrow V_2 - V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \simeq 899$ V

Dopo connessione:

$Q_2 + Q_3 = q_2$ cons. della carica

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + Q_2}{R_2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{R_3}$$

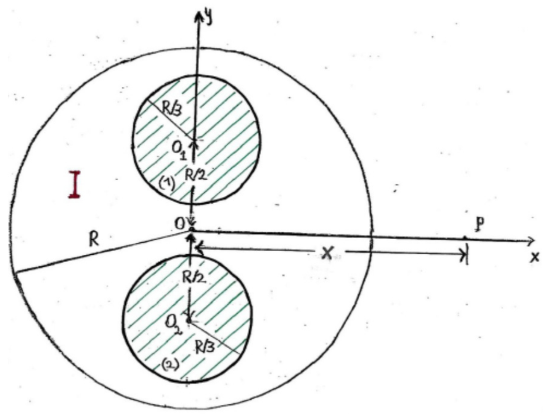
$$\rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{R_2 + R_3} \simeq 1079V, Q_2 = \frac{q_2 R_2 - q_1 R_3}{R_2 + R_3} \simeq 4.4 10^{-9} C, Q_3 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} q_1 + q_2 \simeq 6\ 10^{-9} C$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{R_2\left(R_2 + R_3\right)} \simeq 5395 Vm^{-1}$$

$$E_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{R_3\left(R_2 + R_3\right)} \simeq 21580 Vm^{-1}$$

Problema 2

All'interno di un lungo cilindro conduttore di raggio R sono ricavate due cavita' cilindriche uguali, con assi paralleli a quello del cilindro e distanti da esso $d=R/2$, e raggio $r=R/3$, come in figura. Le cavita' sono riempite di conduttore, e isolate dal resto del cilindro. Nel cilindro scorre una corrente I uscente dal foglio, mentre nelle cavita' scorre una corrente in senso opposto di densita' $j_2 = 5\,j_1$, dove j_1 e' la densita' di corrente nel cilindro.



a) Trovare il campo magnetico B nel punto P in figura.

Si supponga di disporre un filo conduttore di massa M, lunghezza L e percorso da corrente I' parallelamente al cilindro e passante per P nel piano contenente l'asse x.

b) Determinare la distanza del filo dall'asse del cilindro e il segno di I' tali da garantire che P sia una posizione di equilibrio stabile per il filo.

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\rightarrow B^{(A)} 2\pi x = \mu_0 j_1 \pi R^2 \rightarrow \mathbf{B}^{(A)} = \frac{\mu_0 j_1 R^2}{2x}\left(-\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\rightarrow B^{(B)} 2\pi r = 2\mu_0 \left(j_1 + j_2\right)\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 \underbrace{\cos\theta}_{\frac{x}{r}} \rightarrow B^{(B)} = \frac{\mu_0\left(j_1 + j_2\right)R^2 x}{9r^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{B}^{(B)} = \frac{\mu_0\left(j_1 + j_2\right)R^2 x}{9r^2}\left(+\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\rightarrow \mathbf{B}(x) = \mu_0 R^2 \hat{\mathbf{j}}\left[\frac{\left(j_1 + j_2\right)x}{9\underbrace{\left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)}_{r^2}} - \frac{j_1}{2x}\right]$$

$$\mathbf{F} = I'\mathbf{L}\times\mathbf{B} \to F(x) = I'LB(x)$$

$$\to F = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

$$\to \mu_0 R^2 \left[\frac{(j_1 + j_2)x}{9\left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \frac{j_1}{2x} \right] = 0 \to \frac{(j_1 + j_2)x}{9\left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)} = \frac{j_1}{2x}$$

$$\to x \equiv \overline{x} = \sqrt{\frac{9 j_1 \frac{R^2}{4}}{2 j_2 - 7 j_1}} = \sqrt{\frac{9 j_1 \frac{R^2}{4}}{10 j_1 - 7 j_1}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

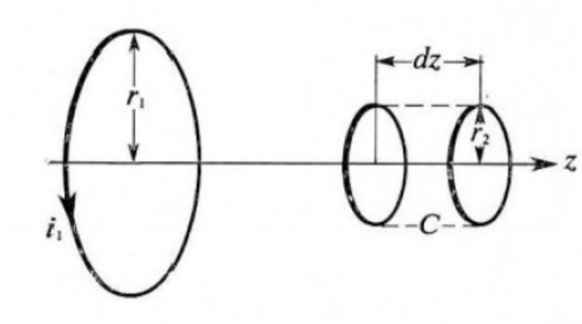
NB **B** cambia segno per $x <$ o $> \overline{x} \to \mathbf{F} \parallel \hat{\mathbf{i}}$ cambia segno:

$F > 0$ per $x < \overline{x}$, $F < 0$ per $x > \overline{x} \to$ Eq. stabile

---

Problema 3

Una spira di raggio r_1, percorsa da una corrente costante i_1, giace nel piano xy col centro nell'origine. Una seconda spira, di raggio $r_2 << r_1$ e resistenza R, si avvicina alla prima mantenendosi ad essa parallela; il suo centro si muove lungo l'asse z con velocita' costante v.



Trovare:

a) La corrente i_2 che circola nella seconda spira in funzione della coordinata z del suo centro
b) La forza magnetica esercitata sulla seconda spira, e la forza meccanica necessaria per mantenere uniforme il suo moto
c) Il lavoro meccanico e l'energia dissipata per effetto Joule fra due istanti generici

$$d\Phi = \pi r_2^2 \left[B_z\left(z+dz\right) - B\left(z\right) \right] \approx \pi r_2^2 \frac{dB_z}{dz} dz$$

$$B\left(z\right) = \frac{\mu_0}{2} \frac{i_1 r_1^2}{\left(r_1^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dz}{dt} = -v$$

$$\rightarrow i_2 = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{v}{R}\frac{d\Phi}{dz}$$

$$\rightarrow i_2 = -\frac{3}{2}\pi\mu_0 \frac{i_1 r_1^2 r_2^2 v}{R} \frac{z}{\left(r_1^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$\mathbf{F}_{magn} = -i_2 \oint\limits_{spira} \mathbf{B} \times d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{F}_{magn} = \mathbf{F}_z,$ altre componenti nulle per simmetria

$\rightarrow$ negli elementi di spira dovuta solo alla componente radiale di $\mathbf{B}$

$$\rightarrow F_{magn} = -2\pi r_2 i_2 B_r$$

$$\mathbf{F}_{mecc} = -\mathbf{F}_{magn} \rightarrow F_{mecc} = 2\pi r_2 i_2 B_r$$

Poiche' la spira si muove a vel. costante e la forza magnetica non compie lavoro:

$$P_{mecc} = P_{Joule} = i_2^2 R$$

Dettaglio:

$$F_{magn} = \mu \frac{dB}{dz}$$

$$\mu = \pi r_2^2 i_2 = \pi r_2^2 \left[-\frac{3}{2}\pi\mu_0 \frac{i_1 r_1^2 r_2^2 v}{R} \frac{z}{\left(r_1^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

$$\frac{dB}{dz} = -3\mu_0 \frac{i_1 r_1^2 z}{\left(r_1^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\rightarrow F_{magn} = -\frac{9}{4}\pi^2 \mu_0^2 \frac{i_1^2 r_1^4 r_2^4 v z^2}{\left(r_1^2 + z^2\right)^5} = -F_{mecc}$$

$$W_{mecc} = \int_{t_1}^{t_2} F_{mecc} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{9}{4}\pi^2 \mu_0^2 \frac{i_1^2 r_1^4 r_2^4 v z^2}{\left(r_1^2 + z^2\right)^5} v dt = \int_{z}^{z+v\Delta t} \frac{9}{4}\pi^2 \mu_0^2 \frac{i_1^2 r_1^4 r_2^4 v z^2}{\left(r_1^2 + z^2\right)^5} dz$$

$$W_{el} = \int_{t_1}^{t_2} i_2^2 R dt = \int_{z_1}^{z_2} i_2^2 R \frac{dt}{dz} dz = \int_{z}^{z+\Delta z} i_2^2 \frac{R}{v} dz = \int_{z}^{z+\Delta z} \frac{9}{4}\pi^2 \mu_0^2 \frac{i_1^2 r_1^4 r_2^4 z^2}{\left(r_1^2 + z^2\right)^5} dz = W_{mecc}$$