Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2018/19

Elettricita' e Magnetismo

Prova scritta – 27/06/2019

Problema 1

Una carica puntiforme q di massa m viene lanciata da grande distanza con velocita' iniziale v_0 verso il centro di una sfera fissa di raggio R, avente una carica Q uniformemente distribuita sulla superficie; q e Q hanno lo stesso segno.

a) Determinare il valore minimo di v_0 per cui si ha collisione fra carica e sfera
b) Se v_0 e' uguale a meta' del valore trovato in a), determinare la distanza dal centro della sfera alla quale il moto della carica si inverte

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 mR} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\rightarrow \frac{1}{16R} = \frac{1}{4r}$$

$$\rightarrow r = 4R$$

Problema 2

Un conduttore cilindrico di lunghezza infinita e raggio a e'percorso da una corrente continua con la seguente densita':

$$j = j_a \frac{r}{a}, \quad 0 < r < a$$
$$j = 0, \qquad r > a$$

a) Determinare il campo magnetico dentro e fuori dal conduttore
b) Determinare la densita' lineare di energia magnetostatica all'interno del conduttore

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$$

$$r < a : \oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_0^r j_a \frac{r}{a} 2\pi r dr = \mu_0 \frac{j_a}{a} 2\pi \frac{1}{3} r^3 = \frac{\mu_0 j_a 2\pi r^3}{3a}$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \frac{\mu_0 j_a 2\pi r^3}{3a}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 j_a r^2}{3a}$$

$$r > a : \oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_0^a j_a \frac{r}{a} 2\pi r dr$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \frac{2\pi \mu_0 j_a}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi \mu_0 j_a}{a} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a = \frac{2\pi \mu_0 j_a a^2}{3}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 j_a a^2}{3r}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 j_a}{3a} r^2 \right)^2 = \frac{\mu_0 j_a^2}{18a^2} r^4$$

$$\frac{dU_B}{dz} = \iint_\Sigma u_B r dr d\varphi = \frac{\mu_0 j_a^2}{18a^2} 2\pi \int_0^a r^5 dr = \frac{\mu_0 \pi j_a^2}{54a^2} a^6 = \frac{\mu_0 \pi j_a^2 a^4}{54}$$

Problema 3

Un'asticella conduttrice di resistenza trascurabile e massa m puo' scivolare senza attrito a contatto di due guide conduttrici parallele e verticali, anch'esse di resistenza trascurabile, separate da una distanza l e collegate a un estremo da un'induttanza L; l'induttanza del circuito formato da guide e asticella e' trascurabile. Il sistema e' immerso in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ uniforme e perpendicolare al piano che contiene le guide. All'istante $t = 0$ l'asticella viene lasciata andare da ferma da una quota z_0.

a) Determinare la corrente che circola nella maglia in funzione di z
b) Determinare la forza totale che agisce sulla sbarretta in funzione di z
c) Scrivere l'equazione del moto per la sbarretta e descriverne almeno qualitativamente il moto

$$\Phi(z) = Blz \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} = -Bl\frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow L\frac{di}{dt} = Bl\frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow \int_o^i di = i = \frac{Bl}{L}\int_{z_0}^{z} dz = \frac{Bl}{L}(z - z_0)$$

$$\rightarrow i(z) = \frac{Bl}{L}(z - z_0)$$

$$\mathbf{F_m} = i\mathbf{l}\times\mathbf{B} \rightarrow F_m = ilB$$

$$\rightarrow F_{tot} = mg - \frac{B^2l^2}{L}(z - z_0),\ \ z \text{ crescente verso il basso}$$

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{B^2l^2}{mL}(z - z_0)$$

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{mL}z = g + \frac{B^2l^2z_0}{mL},\ \text{eq. dei moti armonici}$$

$$\rightarrow z(t) = A\sin\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}t + B\cos\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}t + \frac{gmL}{B^2l^2} + z_0$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = A\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}\cos\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}t - B\sin\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}t$$

$$z(0) = z_0 \rightarrow B + \frac{gmL}{B^2l^2} + z_0 = z_0 \rightarrow B = -\frac{gmL}{B^2l^2}$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = 0 \rightarrow A\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}} = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\rightarrow z(t) = -\frac{gmL}{B^2l^2}\cos\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}t + \frac{gmL}{B^2l^2} + z_0 = z_0 + \frac{gmL}{B^2l^2}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}t\right)$$