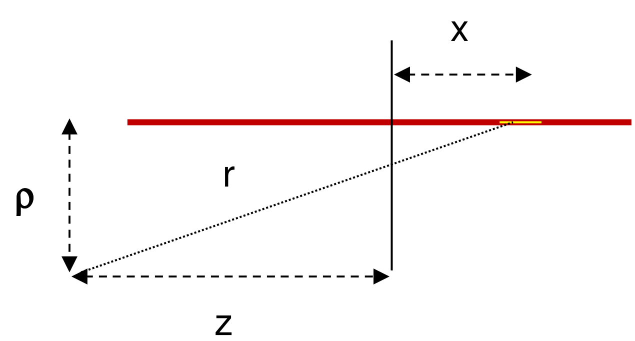
Potenziale elettrostatico di un segmento carico
in un punto generico

Volendo generalizzare il calcolo di ϕ al caso di un punto spaziale generico, si puo' innanzi tutto osservare che il sistema ha simmetria cilindrica intorno all'asse lungo il quale giace il segmento: quindi non si perde in generalita' limitandosi a un piano qualsiasi che contiene il segmento. Nel piano prescelto, coordinate z (lungo il segmento) e ρ $\perp$ z:



$r^2 = (z+x)^2 + \rho^2$

Contributo al potenziale in (z,d) dall'elemento di carica dq:

$$d\phi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[(x-z)^2+\rho^2\right]^{1/2}}$$

Pot. totale:

$$\to \phi(z,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{\left[(x-z)^2+\rho^2\right]^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{x-z}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{x-z}{\rho}\right)^2+1}\right]\Bigg|_{-L}^{+L}$$

$$\to \phi(z,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\frac{L-z}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{L-z}{\rho}\right)^2+1}}{-\frac{L+z}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{L+z}{\rho}\right)^2+1}}\right]$$

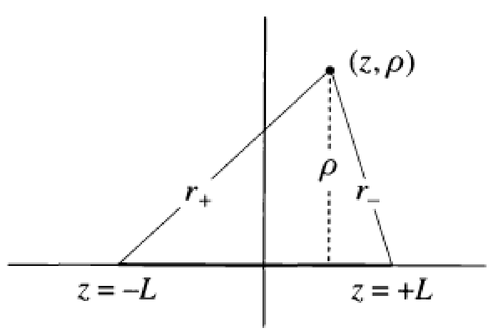
$$\to \phi(z,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+(L-z)}{\sqrt{(L+z)^2+\rho^2}-(L+z)}\right]$$

$$\phi(z,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+(L-z)}{\sqrt{(L+z)^2+\rho^2}-(L+z)}\right] \triangleright$$

Linee equipotenziali:

$$\phi(z,\rho) = A \to \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+(L-z)}{\sqrt{(L+z)^2+\rho^2}-(L+z)}\right] = A$$

Con riferimento alla figura:



risulta

$$r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + \left(L \pm z\right)^2}$$

Introducendo

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r_- + r_+\right) \\ t = \dfrac{1}{2}\left(r_- - r_+\right) \end{cases} \rightarrow ut = \frac{1}{4}\left(r_-^2 - r_+^2\right) = \frac{1}{4}\left[\rho^2 + \left(L+z\right)^2 - \rho^2 - \left(L-z\right)^2\right] = -zL$$

$$\rightarrow A = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{\left(L-z\right)^2+\rho^2}+\left(L-z\right)}{\sqrt{\left(L+z\right)^2+\rho^2}-\left(L+z\right)}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{u+t+L-z}{u-t-L-z}\right]$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\left(u+L\right)\left(1+t/L\right)}{\left(u-L\right)\left(1+t/L\right)}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{u+L}{u-L}\right] = A$$

Ora:

u dipende solo da $\left(r_- + r_+\right)$

$\rightarrow$ Linea equipotenziale = luogo dei punti con $r_- + r_+ =$ cost $\rightarrow$ Ellisse

$\rightarrow$ Linea di forza $\rightarrow$ Iperbole confocale all'ellisse