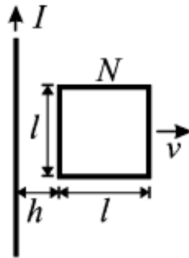


## Forza magnetica su una bobina in movimento nel campo di un filo

Val la pena riconsiderare un esercizio piuttosto diffuso, di solito formulato nel modo seguente: Una bobina di resistenza  $R$ , composta da  $N$  spire quadrate di lato  $l$  e in moto con velocità costante  $v$ , si trova a una distanza  $h$  da un filo rettilineo indefinito, complanare alla spira e percorso da una corrente costante  $I$ . Determinare la forza da applicare per allontanare la bobina con velocità costante  $v$



$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$v = \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \Phi(B) = N \int_{\Sigma} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N I l}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h}$$

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dh} \frac{dh}{dt} = -\frac{\mu_0 N I l}{2\pi R} \frac{h}{h+l} \frac{h-(h+l)}{h^2} v$$

$$\rightarrow i = \frac{\mu_0 N I l^2 v}{2\pi R h (h+l)}$$

$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ , sui 4 lati della spira

Forze sui lati orizzontali: uguali e opposte

Forze sui lati verticali: opposte, modulo diverso

$$\rightarrow F = F' - F'' = -il \frac{\mu_0 N I}{2\pi h} + il \frac{\mu_0 N I}{2\pi (h+l)}, \text{ verso il filo}$$

$$\rightarrow F_{ext} = il \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h+l} \right) = l \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \frac{\mu_0 N I l^2 v}{2\pi R h (h+l)} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h+l} \right)$$

$$\rightarrow F_{ext} = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 R h^2 (h+l)^2}$$

L'espressione trovata per la forza puo' essere confrontata con la legge generale per la forza magnetica su un dipolo in un campo non uniforme:

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$$

valida per  $\boldsymbol{\mu}$  costante.

Scritta nella forma

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\mu}(\nabla B_{\parallel})$$

in cui  $B_{\parallel}$  e' la componente di  $\mathbf{B}$  lungo  $\boldsymbol{\mu}$ , risulta applicabile anche al caso

in cui  $\boldsymbol{\mu} \neq \text{cost}$ , come quello discusso qui. Infatti, usando componenti cilindriche per  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\boldsymbol{\mu} = il^2 \hat{\mathbf{u}}_{\varphi}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_{\varphi} \equiv B_{\varphi}(r) \hat{\mathbf{u}}_{\varphi}$$

$\mathbf{B} \parallel \boldsymbol{\mu} \rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\mu}(\nabla B) \equiv \boldsymbol{\mu}(\nabla B_{\varphi})$ , perche' le componenti cilindriche  $B_r, B_z$  sono nulle

$$\nabla B_{\varphi} = \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_{\varphi} + \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z$$

$$\rightarrow \nabla B_{\varphi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \text{ perche' } B_{\varphi} \text{ dipende solo da } r \rightarrow \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial z} \equiv 0$$

$$\rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\mu}(\nabla B) = -\boldsymbol{\mu} \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \text{ in questo caso la forza magnetica risulta } \perp \mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\mu} = Nil^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 v}{2\pi Rh(h+l)} l^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 v}{2\pi Rh(h+l)}$$

$$\nabla B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \Big|_{r=h+\frac{l}{2}}, \nabla B \text{ preso al centro della spira}$$

$$\rightarrow F = \left[ \frac{\mu_0 N^2 I^2 v}{2\pi Rh(h+l)} \right] \left[ -\frac{\mu_0 I}{2\pi \left(h + \frac{l}{2}\right)^2} \right]$$

$$\rightarrow F_{ext} = -F = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 Rh(h+l) \left(h + \frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 Rh^4} \text{ se } h \gg l$$

Anche per l'espressione esatta trovata prima

$$F_{ext} = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 Rh^2 (h+l)^2} \approx \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 l^4 v}{(2\pi)^2 Rh^4} \text{ se } h \gg l$$

La differenza fra l'espressione esatta e quella approssimata da  $\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ ,

che come si vede va a 0 per grandi distanze, e' dovuta al fatto che nella seconda

la spira e' approssimata come un dipolo, mentre nella prima (esatta) si tiene conto anche

dei termini di quadrupolo etc, trascurabili a distanze grandi rispetto alla dimensione della spira