Legame fra campo esterno e campo totale agente sul dipolo:
per dielettrici a bassa densita' (gas):

$E_{tot} \cong E_{ext}$

per dielettrici ad alta densita' (liquidi,solidi):
contributo delle cariche di polarizzazione non trascurabile

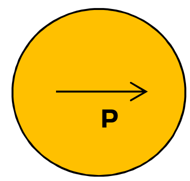
$E_{tot} \neq E_{ext}$

Differenza fra campo esterno e campo totale agente sul dipolo:
Interessante perche' legata a struttura microscopica del dielettrico

$\rightarrow$ Modello semplificato dell'effetto della polarizzazione

Premessa: Campo di una sfera dielettrica polarizzata

Ipotesi: **P** uniforme



Sistema equivalente a due sfere cariche uguali

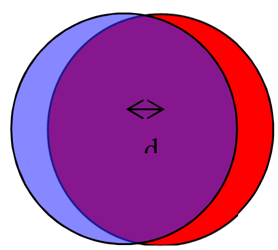
Raggio a, carica opposta con densita' ρ, separazione d

$\rightarrow$ Momento di dipolo:

$$p = Qd = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 d$$

$\rightarrow$ Polarizzazione:

$$P = \frac{p}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho d}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \rho d$$



Campo interno di una sfera uniformemente carica:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{a^3}$$

Campo prima sfera (rossa):

$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1}{a^3}$, $\mathbf{r}_1$ coordinata riferita al centro di 1

Campo seconda sfera (blu):

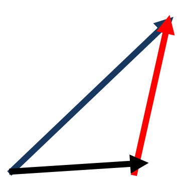
$\mathbf{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_2}{a^3}$, $\mathbf{r}_2$ coordinata riferita al centro di 2

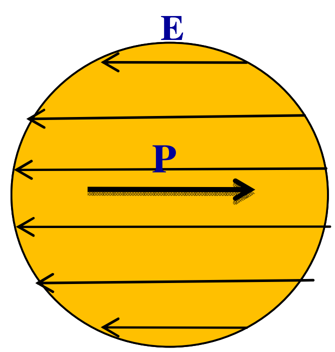
Campo totale = Campo interno di una sfera uniformemente polarizzata

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1}{a^3} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_2}{a^3} = \frac{Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{3V\varepsilon_0} = -\frac{Q\mathbf{d}}{3V\varepsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0},\ \mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Poiche' $\mathbf{P}$ e' uniforme, lo e' anche $\mathbf{E}$

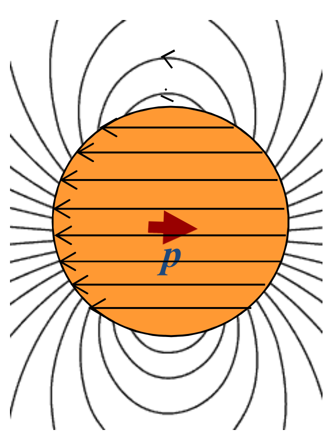
$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{d}$$





Campo esterno di una sfera uniformemente polarizzata:

quello di un dipolo elettrico nell'origine: $p = P\frac{4}{3}\pi a^3$



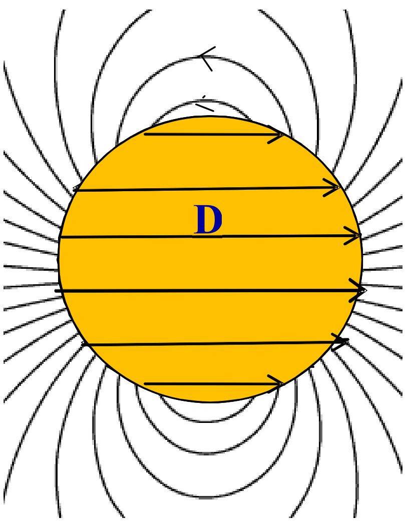
Dentro la sfera: $\mathbf{E} = -\dfrac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = -\varepsilon_0 \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} + \mathbf{P} = \frac{2}{3}\mathbf{P}$$

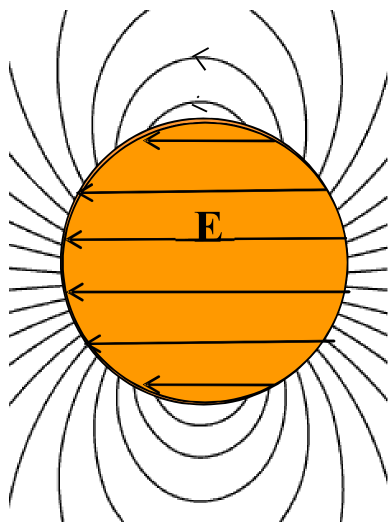
Fuori la sfera: $\mathbf{E} =$ dipolo $\mathbf{p}$

$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0 \cdot$ dipolo $\mathbf{p}$

D: linee chiuse
Origine da cariche libere (assenti)



E: linee aperte
Origine da tutte le cariche



$\rho_f \equiv 0 \to \nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$ ma $\mathbf{D} \neq 0:$ $\mathbf{D}$ riceve contributi da $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times (\varepsilon\mathbf{E})$

Infatti ε non è costante $(\leftarrow$ discontinuità alla superficie$)$

Relazione fra polarizzazione e c. elettrico:
$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{loc}$
$\mathbf{P} = n\alpha \mathbf{E}_{loc}$, dielettrico lineare
$\mathbf{E}_{loc}$ = campo elettrico totale agente su ogni molecola
$\rightarrow$ Per conoscere $\mathbf{P}$ occorre conoscere $\mathbf{E}_{loc}$

Due problemi non banali:

1) $\mathbf{E}_{loc} \neq \mathbf{E}_{diel}$

$\mathbf{E}_{diel}$ Campo presente nel dielettrico
Infatti: Bisogna escludere il contributo della molecola stessa

2) $\mathbf{E}_{diel} = ?$

Due possibilita':

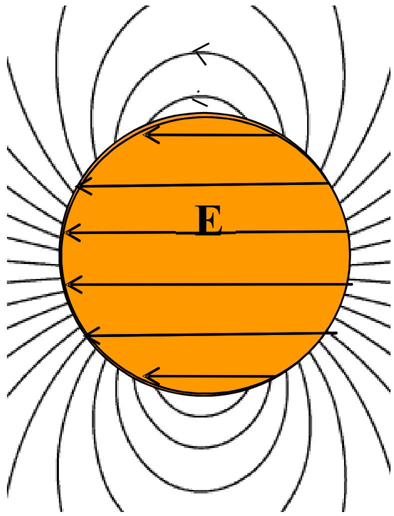
Polarizzazione permanente: Elettreti, analoghi ai magneti permanenti
In questo caso non e' necessario un campo esterno polarizzante
$\rightarrow$ Il c. elettrico totale e' quello delle cariche di polarizzazione
$\mathbf{E}_{diel} = \mathbf{E}_p$

Polarizzazione indotta: Tutti gli altri casi
In questo caso e' necessario un campo esterno polarizzante
$\rightarrow$ Il c. elettrico totale e' la somma di quello esterno e di quello delle cariche di polarizzazione
$\mathbf{E}_{diel} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$

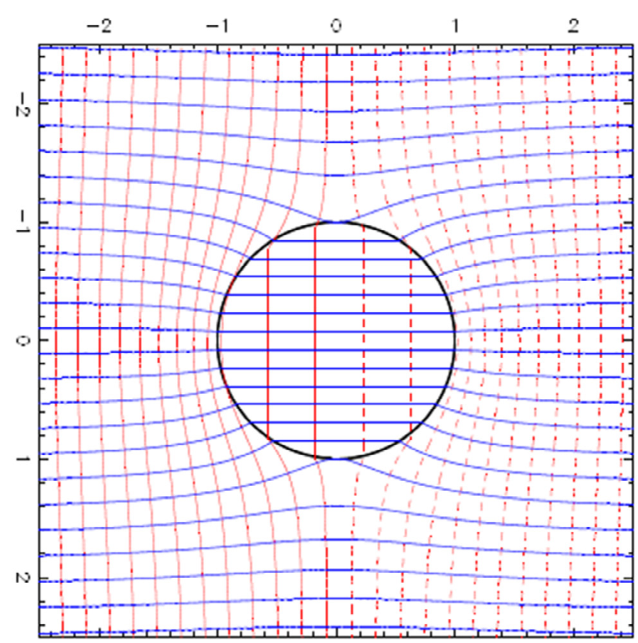
$\mathbf{E}_0$ campo polarizzante (= esterno)
$\mathbf{E}_p$ campo dovuto a cariche di polarizzazione

Esempi relativi al caso $\boldsymbol{E}_{diel} = uniforme$

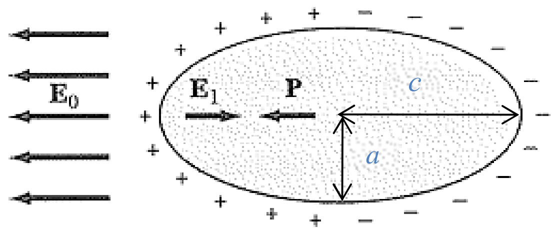
Sfera permanentemente polarizzata



Sfera dielettrica immersa in un c. esterno uniforme



Campo depolarizzante:



$\mathbf{P}$: polarizzazione (ipotesi: uniforme)

$\mathbf{E}_1$: campo depolarizzante

$\mathbf{E}_1$: campo dovuto alle cariche di polarizzazione sulla superficie

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_{diel}$$

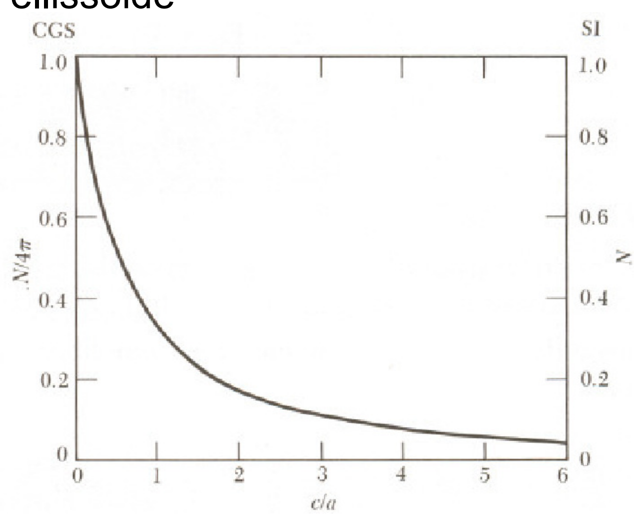
$$\rightarrow \mathbf{E}_{diel} = \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0 \chi} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 - \frac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

N: fattore di forma del dielettrico

$$\rightarrow \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \left(\mathbf{E}_0 - \frac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right)$$

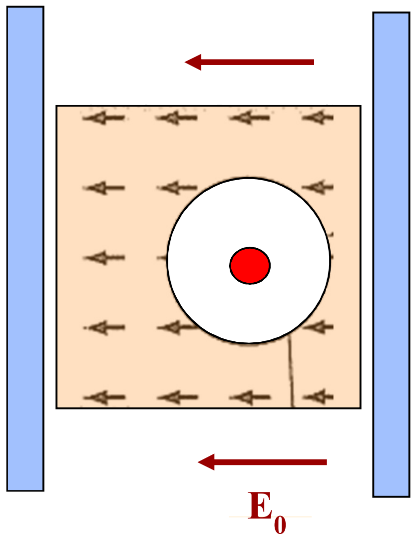
$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{1 + N\chi} \mathbf{E}_0$$

Fattore di forma del dielettrico:
Dipende in generale da forma e dimensioni del campione
Esempio per ellissoide



Determinazione del campo locale

Lastra sottile immersa in un campo uniforme: $\mathbf{P}$ uniforme
Idea centrale (Lorentz): ‘Rimozione ideale’ di una sfera di dielettrico centrata sulla molecola: cavita’ piccola rispetto a dimensione lastra, grande rispetto a raggio molecolare



$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_1$ Campo macroscopico nel dielettrico

$\mathbf{E}_0=$ Campo polarizzante

$\mathbf{E}_1=$ Campo cariche di polarizzazione

$\rightarrow \mathbf{E}_1=-\dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$ Lastra sottile $\perp$ $\mathbf{E}_0$

$$\rightarrow \mathbf{E}=\mathbf{E}_0-\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

Campo al centro della sfera vuota:

$\mathbf{E}_{eff}=\mathbf{E}+\mathbf{E}_2$ Campo efficace nella cavita'

$\mathbf{E}_2=$ Campo cariche di polarizzazione

Equivalente a quello di una sfera con polarizzazione $-\mathbf{P}$

$$\rightarrow \mathbf{E}_2=-\frac{-\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}=\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

Campo locale:

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{eff} + \mathbf{E}_3 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} + \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{\substack{\text{dipoli} \\ \text{entro sfera}}} \mathbf{E}_i$$ Contributo dei dipoli contenuti entro la sfera

$\mathbf{E}_3$: termine difficile da valutare in generale

Gas, liquidi, solidi a simmetria cubica: zero

Solidi con altra simmetria: piccolo

$$\mathbf{E}_{loc} \approx \mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$ Campo di Lorentz

Valida indipendentemente dalla forma del dielettrico

Relazione fra polarizzazione e polarizzabilita':

$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_{loc}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = n\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right) \rightarrow \mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0}\mathbf{E} \rightarrow \chi = \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \varepsilon_r - 1 \\ \chi &= \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \rightarrow \varepsilon_r - 1 = \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0}$$

$$(\varepsilon_r - 1)\left(1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} \rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \left[\frac{(\varepsilon_r - 1)}{3} + 1\right]\frac{n\alpha}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3}\frac{n\alpha}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}$$ Relazione di Clausius – Mossotti

$$\rightarrow \alpha = \frac{3\varepsilon_0}{n}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 + \frac{1}{3}\frac{p^2}{kT}$$

En. di un condensatore piano in vuoto:

$$U_E^0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 h}{\varepsilon_0 S}$$

En. di un condensatore piano con dielettrico:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} < U_E^0$$

Processo di carica:

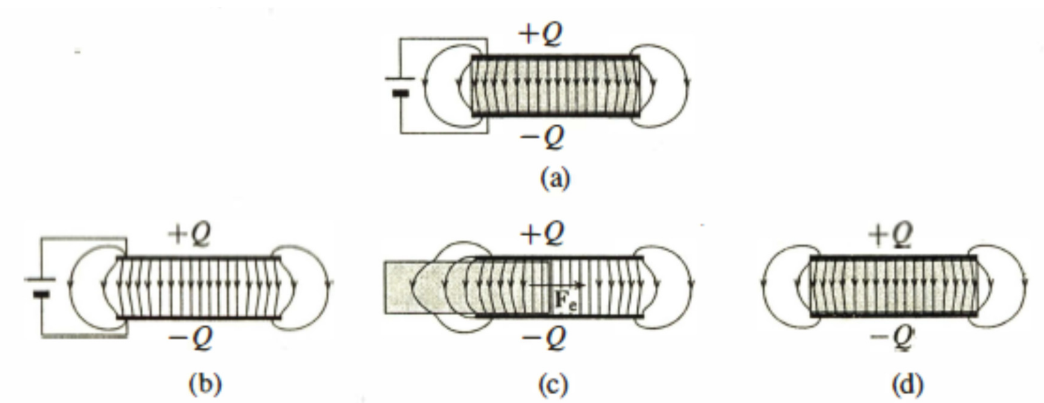
1) Carica capacita' in vuoto

2) Distacco batteria

3) Inserimento lastra di dielettrico fra le armature

Effetti di bordo $\rightarrow$ Forza che attira la lastra fra le armature

$\rightarrow$ Lavoro dell'agente esterno che tiene la lastra < 0



$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 S h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S^2} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_f \sigma_f}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} S h$$

$$\mathbf{E} = \frac{\phi}{h} = \frac{Q}{Ch} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \sigma_f, V = Sh$$

$$\rightarrow U_E = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} V$$

$w_E = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ densita' volumetrica di energia elettrostatica

$$\rightarrow U_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$$

Generalizzazione: Regione spaziale con dielettrico + cariche libere

En. potenziale elettrostatica $=$ Lavoro per assemblare le cariche libere
Lavoro infinitesimo: speso per incremento infinitesimo della carica libera

$$\rightarrow \delta W = \int_{spazio} \delta\rho_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV$$

$\phi(\mathbf{r})$ pot. dovuto a tutte le cariche, libere e di polarizzazione

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f \rightarrow \nabla\cdot\delta\mathbf{D} = \delta\rho_f$$

$$\rightarrow \delta W = \int_{spazio} (\nabla\cdot\delta\mathbf{D})\phi(\mathbf{r})\,dV$$

$\phi(\nabla\cdot\delta\mathbf{D}) = \nabla\cdot(\phi\delta\mathbf{D}) - \nabla\phi\cdot\delta\mathbf{D}$ identita'

$$\rightarrow \phi(\nabla\cdot\delta\mathbf{D}) = \nabla\cdot(\phi\delta\mathbf{D}) + \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}$$

$$\rightarrow \delta W = \int_{spazio} \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\,dV + \int_{spazio} \nabla\cdot(\phi\delta\mathbf{D})\,dV$$

$\int_{spazio} \nabla\cdot(\phi\delta\mathbf{D})\,dV = \lim_{R\to\infty}\int_{V_R} \nabla\cdot(\phi\delta\mathbf{D})\,dV,\ V_R$ volume sferico di raggio R

Teo. divergenza:

$$\int_{V_R} \nabla\cdot(\phi\delta\mathbf{D})\,dV = \int_{\Sigma_R} \phi\delta\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\Sigma$$

Cariche libere in regione limitata di raggio $a \ll R$:

$$\phi \propto \frac{1}{R}, \mathbf{D} \propto \frac{1}{R^2}, \Sigma \propto R^2$$

$$\rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_R} \phi\delta\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\Sigma = 0$$

$$\rightarrow \delta W = \int_{spazio} \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\,dV$$

Per dielettrico lineare:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \rightarrow \delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}) = \varepsilon\delta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) = 2\mathbf{E}\cdot\varepsilon\delta\mathbf{E} = 2\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})$$

$$\rightarrow W = \int_0^D \delta W = \int dV \int_0^D \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\int dV \int_0^D \delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dV$$

$$\rightarrow w_E = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

Altra espressione per l'en. elettrostatica di un insieme di cariche in un dielettrico:

Caso del vuoto (v. prima):

$U_E = \frac{1}{2}\int \rho\phi dV$, fattore $\frac{1}{2}$ evita il doppio conteggio

Caso del dielettrico:

$U_E = \frac{1}{2}\int \rho_f \phi dV$, ϕ pot. dovuto a tutte le cariche

$\rightarrow U_E = \frac{1}{2}\int \rho_f \phi_f dV + \frac{1}{2}\int \rho_f \phi_p dV$

Fattore $\frac{1}{2}$ nel II termine ??

Origine diversa (non dimostrata):

Nell'assemblare il sistema di cariche libere nel dielettrico, il lavoro speso per meta' si ritrova nell'en.pot. di interazione fra le cariche libere e quelle di polarizzazione;l'altra meta' viene spesa per polarizzare il dielettrico (orientamento,deformazione)