

Moto di cariche: situazione non statica

Richiede la presenza di *campi elettrici, portatori ~ liberi*

Sede: conduttori, elettroliti, semiconduttori, gas/liquidi ionizzati, vuoto

Enfasi su conduttori

Es. tipico:



Due conduttori a pot. diverso, congiunti a $t = 0$ da un filo conduttore

→ Passaggio di portatori da 2 a 1 fino a che i due pot. sono uguali

Fenomeno transitorio di breve durata, durante il quale c'è passaggio di *corrente* fra i due conduttori

Def. di (intensità di) corrente:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Unità di misura:

$$1 A = 1 C / s$$

Grandezza fondamentale nel SI,

per ragioni di maggior facilità a mantenere uno standard accurato e stabile rispetto alla carica

Per mantenere stazionario il flusso di cariche fra i due conduttori:

Dispositivo che riporti continuamente le cariche da 1 a 2, lavorando contro le forze del campo elettrostatico

→ Dispositivo *non* elettrostatico

Generatore di *forza elettromotrice*

Intensita' di corrente: definizione adatta a collegamenti fatti con conduttori filiformi a sezione definita e costante

Caso generale: vettore *densita' di corrente* \mathbf{j}

Definito in ogni punto dello spazio

Modulo: Corrente che fluisce attraverso l'unita' di superficie

\perp alla corrente stessa

Direzione: $\mathbf{v}_{cariche}$

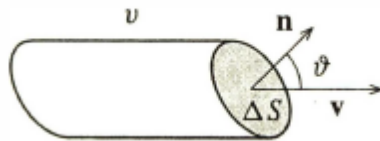
Verso: $q > 0 \rightarrow \mathbf{v}_{cariche}$, $q < 0 \rightarrow -\mathbf{v}_{cariche}$

$\rightarrow \Delta I = j\Delta S$

Generalizzazione:

$$dI = \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$\rightarrow I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, flusso del vettore \mathbf{j} attraverso S



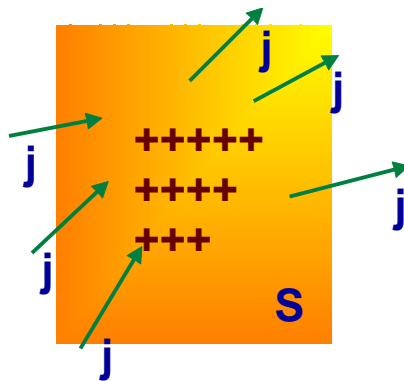
Conservazione della carica elettrica:

Volume V chiuso da superficie S :

Variazione in dt della carica Q contenuta in $V =$ Corrente attraverso $S \cdot dt$

$$\rightarrow dQ = -\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS dt$$

$$\rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



Teo. della divergenza:

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV$$

$$Q = \int_V \rho dV \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Per l'arbitrarietà di V :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Eq. di continuita'}$$

Descrive la conservazione *locale* della carica:

Fondamentale per coerenza con il principio di relativita'

Passaggio di corrente in conduttori filamentari

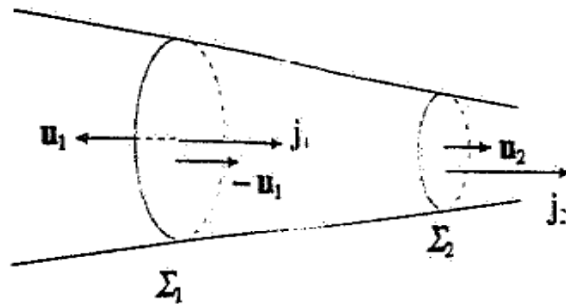
Densità di corrente \mathbf{j} , sezione variabile

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS = 0 \quad \text{condizione di stazionarietà}$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 d\Sigma_2 = 0, \quad \text{nullo il flusso attraverso la sup. laterale}$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 d\Sigma_1}_{i_1} = - \int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 d\Sigma_2 = \underbrace{\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{u}}_2) d\Sigma_2}_{i_2}$$

$\rightarrow i_1 = i_2$ corrente uguale in tutti i tratti del conduttore



Relazione fra corrente e moto dei portatori:

$$I = q \frac{dn}{dt}$$

dn n. portatori che attraversano ΔS nell'intervallo dt

Assumendo che la velocità sia la stessa per tutti

→ $dn = n$. portatori contenuti nel cilindretto obliquo

con base $\Delta S \cos \theta$ e altezza $v dt$

→ $dn = N v \Delta S \cos \theta dt$, N densità volumetrica di portatori

$$\rightarrow dn = N \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S dt$$

$$\rightarrow I = q N \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S$$

$$\rightarrow \mathbf{j} = q N \mathbf{v}$$

Generalizzazione al caso di velocità diverse:

dn n. portatori/volume con velocità fra \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

$$\rightarrow dI = q dn \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S$$

$$\rightarrow I = \int dI = q \Delta S \hat{\mathbf{n}} \cdot \int \mathbf{v} dn \text{ corr. totale}$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} dn \text{ vel. vettoriale media}$$

$$\rightarrow I = q N \Delta S \hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle$$

→ $\mathbf{j} = q N \langle \mathbf{v} \rangle$ rel. fra densità di corrente e vel. media

$q > 0 \rightarrow \mathbf{j}$ parallela a $\langle \mathbf{v} \rangle$

$q < 0 \rightarrow \mathbf{j}$ antiparallela a $\langle \mathbf{v} \rangle$

Presenza di portatori di entrambi i segni

(Es. elettrolita, gas/liquido ionizzato, semiconduttore):

$$\mathbf{j} = |q_+| N_+ \langle \mathbf{v}_+ \rangle - |q_-| N_- \langle \mathbf{v}_- \rangle = q_+ N_+ \langle \mathbf{v}_+ \rangle + q_- N_- \langle \mathbf{v}_- \rangle$$

Contributi concordi: segno del prodotto $q \langle \mathbf{v} \rangle$ uguale per entrambi

Significato della velocità che compare in \mathbf{j} :

Portatori hanno velocità 'termiche'

In assenza di c. esterno:

Moto caotico di agitazione termica

$$\rightarrow \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{vel. media nulla} \rightarrow \mathbf{j} = 0$$

$$\rightarrow \langle \mathbf{v}^2 \rangle \neq 0 \quad \text{vel. quadratica media non nulla}$$

Infatti, p es per elettroliti:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle \mathbf{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad \text{dist. di Boltzmann}$$

$$\rightarrow \bar{v} = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

NB *Non* applicabile a elettroni in un conduttore:

Statistica quantistica, non vale la dist. di Boltzmann

Effetto di un c. elettrico:

$$\langle \mathbf{v} \rangle \neq 0$$

$$\rightarrow |\langle \mathbf{v} \rangle| = \frac{|\mathbf{j}|}{qN} \quad \text{vel. di deriva}$$

Confronto vel. termica/vel. di deriva

Ione Na^+ in un elettrolita a T_{amb} :

$$\bar{v} = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = c \sqrt{\frac{3kT}{mc^2}} = 310^8 \sqrt{\frac{3 \cdot 0.026}{22 \cdot 10^9}} = 310^8 \sqrt{\frac{0.078}{2.2}} 10^{-5}$$

$$\rightarrow \bar{v} \approx 565 \text{ ms}^{-1}$$

Elettroni di conduzione nel Cu :

$$I = 1 \text{ A}, S = 1 \text{ mm}^2 \rightarrow j = 10^6 \text{ A/mm}^2$$

$$N = 2N_0 \frac{\rho}{A} = 2 \cdot 610^{23} \frac{910^3}{63.5} \approx 1.710^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$\rightarrow v = \frac{j}{qN} \approx 410^{-5} \text{ ms}^{-1}$$

Vel. di deriva \ll Vel. termica

Vel. di deriva \neq Vel. di propagazione della corrente nel conduttore

Propagazione della corrente:

dovuta alla propagazione del c. elettrico degli elettroni di conduzione che agisce da un elettrone all'altro \sim vel. della luce

Relazione fra vel. di deriva e c. elettrico:

Descrizione classica inadeguata → Mecc. quantistica

Tuttavia, quadro semplificato:

Portatore libero in moto sotto l'azione del campo elettrico

Acquisto q. di moto → moto uniformemente accelerato nella direzione di \mathbf{E}
sovrapposto a moto termico casuale

Urti contro il reticolo ionico: azzeramento vel. di deriva ad ogni urto

Q. di moto acquistata fra due urti successivi:

$m\mathbf{v}_d = e\mathbf{E}\tau$, τ intervallo di tempo medio fra due urti successivi

$$\rightarrow \mathbf{v}_d = \frac{e\mathbf{E}\tau}{m} = \frac{e\tau}{m}\mathbf{E} \equiv \mu\mathbf{E}$$

μ mobilità'

$$[\mu] = [L][T^{-1}][V^{-1}][L] \rightarrow \text{Unita': } ms^{-1}V^{-1}m = m^2s^{-1}V^{-1}$$

$$\rightarrow \mathbf{j} = nev_d = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} = \rho\mu \text{ conduttivita'}$$

$$[\sigma] = [L^{-3}][I^2][T^2][T][M^{-1}] \rightarrow \text{Unita': } A^2kg^{-1}m^{-3}s^3 = AV^{-1}m^{-1}$$

[Superconduttori: $R = 0$ a basse temperature

Fenomeno quantistico (come tutti gli altri): Nessun modello classico

Nuovi superconduttori: $T \leq 100K$

Poco utilizzati in pratica: Difficolta' a fare cavi lunghi]

Metalli: $n \sim$ indipendente da T

Semiconduttori: n fortemente dipendente da T

Legge di Ohm microscopica:

$$\rightarrow \mathbf{j} \equiv \sigma\mathbf{E} \equiv \frac{1}{\rho}\mathbf{E}, \quad \sigma \text{ conduttivita'}, \rho \text{ resistivita'}$$

Segmento di conduttore cilindrico, omogeneo:

lunghezza l , sezione A

$$j = \sigma E = \sigma \frac{\Delta\phi}{l} \rightarrow i = jA = \sigma \frac{\Delta\phi}{l} A = \sigma \frac{\Delta\phi}{l^2} Al = \sigma \frac{\Delta\phi}{l^2} V = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta\phi}{l^2} V$$

$$\rightarrow \Delta\phi = i\rho \frac{l^2}{V} = i\rho \frac{l^2}{Al} = i\rho \frac{l}{A} \equiv iR, \quad R = \rho \frac{l}{A} \text{ resistenza}$$

Legge di Ohm (macroscopica):

$$\Delta\phi = iR$$

Resistenza di un conduttore a sezione variabile:

Contributo di lunghezza infinitesima:

$$dR = \rho(x) \frac{dx}{A(x)},$$

dx spessore infinitesimo nel verso della corrente, A sezione variabile

$$\rightarrow R = \int_0^{x_{max}} \rho(x) \frac{dx}{A(x)}$$

Resistenza di un conduttore qualsiasi:

Decomposizione in elementi di volume infinitesimo

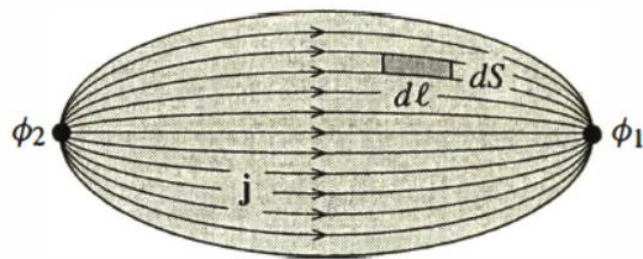
$$dR = \rho \frac{dl}{dS} \rightarrow \frac{1}{dR} = \frac{1}{\rho} \frac{dS}{dl}, \text{ scrittura simbolica per conduttanza}$$

Elementi infinitesimi in parallelo: Somma delle conduttanze $\rightarrow \int_S$

$$\rightarrow \frac{1}{dR} = \frac{S}{\rho dl}, \text{ conduttanza di uno strato generico di area } S$$

Strati infinitesimi in serie: Somma delle resistenze $\rightarrow \int_l$

$$dR = \frac{1}{\int_S \frac{dS}{\rho dl}} \rightarrow R = \int dR$$



Resistività':

$$\rho = \frac{k}{ne^2}$$

funzione di T (temperatura), ν (freq. del segnale), materiale

Conduttori: $\rho \uparrow$ per $T \uparrow$, Semiconduttori: $\rho \downarrow$ per $T \uparrow$

Potenza dissipata in un conduttore:

C. elettrico esterno lavora su ogni portatore

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = e\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \rightarrow dW = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt \rightarrow \frac{dW}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \text{ potenza istantanea}$$

$$P = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} en}{n} = \frac{1}{n} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$\rightarrow P_{tot} = nP = n \frac{1}{n} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \text{ pot. per unita' di volume}$$

In una resistenza cilindrica:

$$\rightarrow P_R = P_{tot} V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} Al = \Delta\phi i = \frac{(\Delta\phi)^2}{R} = i^2 R \text{ Legge di Joule}$$

Pot. dissipata nella resistenza:

Urti elettroni/reticolo ionico \rightarrow Calore