Due modi base di collegare resistenze (=conduttori): Serie e parallelo

Resistenze in serie: Stessa corrente

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\phi_1 = i_1 R_1 \\ \Delta\phi_2 = i_2 R_2\end{array}\right\} \rightarrow \Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2$$

$$i_1 = i_2 = i \rightarrow \Delta\phi = i\left(R_1 + R_2\right)$$

$$\rightarrow R_{serie} = R_1 + R_2$$

$$\rightarrow R_{serie} = \sum_k R_k \quad \text{per } k \text{ resistenze}$$

Resistenze in parallelo: Stessa tensione

$$\left.\begin{array}{l}i_1 = \dfrac{\Delta\phi_1}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{\Delta\phi_2}{R_2}\end{array}\right\} \rightarrow i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta\phi_1}{R_1} + \frac{\Delta\phi_2}{R_2}$$

$$\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \Delta\phi \rightarrow i = \Delta\phi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

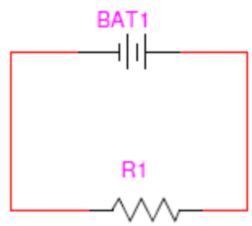
$$\rightarrow \frac{1}{R_{parall}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_{parall}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \text{per } k \text{ resistenze}$$

Problema: Come far circolare corrente in un conduttore

Dissipazione di energia $\rightarrow$ Necessita' di una sorgente di energia

Generatore: produce energia per far circolare corrente, in vari modi



Circuito chiuso: Generatore + Resistenza

$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} > \mathbf{0}$, Γ linea chiusa tangente alla corrente

Se $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$:

$\rightarrow \oint_{\Gamma} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} > \mathbf{0} \rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{E}$ non conservativo

Possibile se:

$\mathbf{E}$ non costante con t

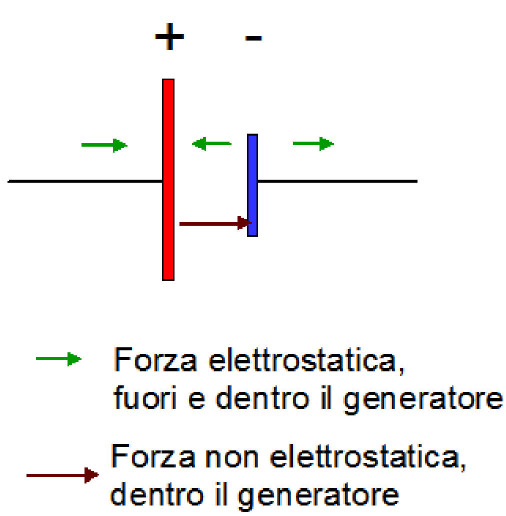
oppure

Presenti forze non elettrostatiche

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{stat}$ nel conduttore

$\mathbf{j}$ antiparallelo a $\mathbf{E}_{stat}$ nel generatore

$\rightarrow$ Forze non elettrostatiche nel generatore



Sulle cariche mobili: forze elettrostatiche e non

Non elettrostatiche originate nel generatore

Condizione stazionaria:

Passaggio di corrente continua nel conduttore

$\rightarrow$ Richiede diff. di potenziale continua ai capi del conduttore

Forza elettromotrice: agente fisico nel generatore

che da' origine alla d.d.p. ai capi del conduttore

C. elettrico:

$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^*$, c.totale in un punto qualsiasi del circuito

$\mathbf{E}$ c. elettrostatico, $\mathbf{E}^*$ c. non elettrostatico (c. elettromotore)

$\rightarrow \oint\limits_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0,$ $\mathbf{E}$ conservativo

Nel conduttore solo $\mathbf{E}$:

$\Delta\phi = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Ri,$ legge di Ohm

$\rightarrow \oint\limits_{circuito} \mathbf{E}_{tot} \cdot d\mathbf{s} = Ri,$ $\mathbf{E}_{tot}$ non conservativo

Nel generatore $\mathbf{E}^*$ ed $\mathbf{E}$:

$\int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = Ri$

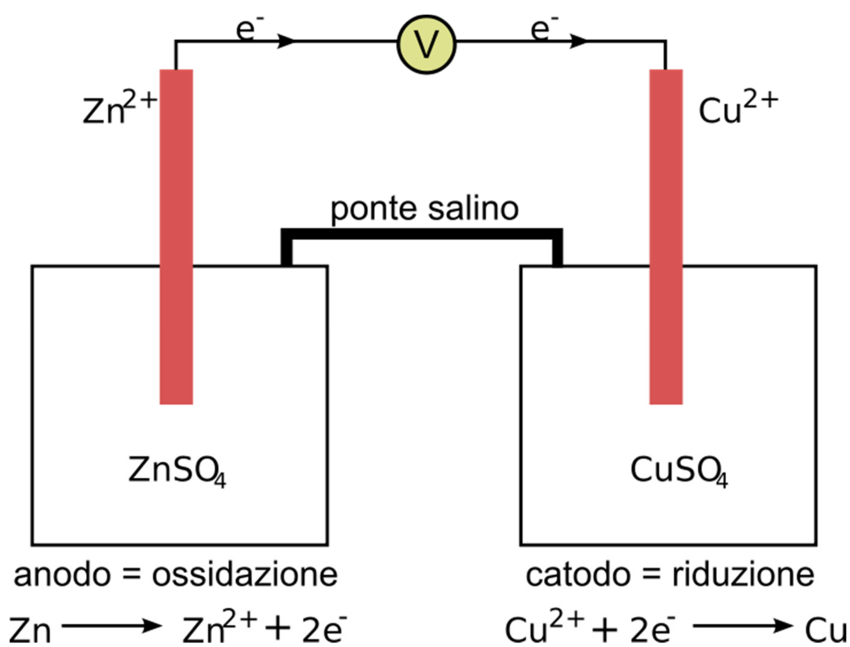
$\rightarrow \oint\limits_{circuito} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = Ri,$ forza elettromotrice del generatore

$\rightarrow [fem] = [ddp]$

Funzionamento di una batteria

Le batterie sono dispositivi elettrochimici nei quali viene generata una forza elettromotrice a seguito di reazioni chimiche. La forza elettromotrice, come si ricordera', e' definita come l'integrale di linea lungo un percorso chiuso (di solito coincidente con un circuito) di un campo elettrico non conservativo: essa costituisce di fatto l'agente fisico in grado di spostare le cariche lungo il circuito, contro l'azione della resistenza.

La pila Daniell, inventata quasi 200 anni fa come miglioramento della pila di Volta, e oggi poco usata, puo' essere usata per comprendere piu' agevolmente il meccanismo generale con cui funzionano tutte le pile.



Il funzionamento della pila e' basato su reazioni di ossidoriduzione: ci sono 2 semicelle, ognuna costituita da un metallo (diverso) immerso in una soluzione di solfato del metallo stesso. Le soluzioni hanno proprieta' elettrolitiche, ossia contengono ioni +vi e -vi liberi:

Zn^{2+} SO_4^{2-}

Cu^{2+} SO_4^{2-}

Risultano energeticamente favoriti i processi per cui:

Gli atomi di *Zn* nell'elettrodo perdono *2 e* e cosi' ionizzati migrano nella soluzione come Zn^{2+}

(Ossidazione)→ L'elettrodo di Zn accumula carica -va

Gli ioni Cu^{2+} nella soluzione acquistano *2 e* nell'elettrodo e cosi' neutralizzati si depositano come *Cu* metallico

(Riduzione)→L'elettrodo di Cu accumula carica +va

→Si stabilisce una differenza di potenziale fra gli elettrodi che e' la forza elettromotrice della pila

Nel caso esaminato i potenziali agli elettrodi risultano

$$Cu^{2+} + 2\ e^- \rightleftharpoons Cu: E^0 = +0.34\ V$$

$$Zn^{2+} + 2\ e^- \rightleftharpoons Zn: E^0 = -0.76\ V$$

Quindi la reazione completa e'

$$Cu^{2+} + Zn \rightleftharpoons Cu + Zn^{2+}$$

con la comparsa di una forza elettromotrice totale

$$+0.34\ V - (-0.76\ V) = 1.10\ V$$

che puo' mettere in movimento gli elettroni dallo *Zn* al *Cu* tramite un collegamento metallico esterno.

Tuttavia l'accumulo di carica +va nella soluzione di una semi-cella e di carica -va nella soluzione dell'altra semi-cella altera rapidamente gli equilibri agli elettrodi, e rende sempre piu' lente le reazioni di ossidazione e riduzione: per mantenere costante la velocita' di reazione occorre mantenere la neutralita' elettrica delle soluzioni. A questo scopo viene stabilito un ponte salino fra le soluzioni, ossia un canale di comunicazione contenente un sale inerte, come $NaCl$ o KNO_3 : gli ioni positivi, come Na^+ o K^+, migrano verso la soluzione con eccesso di carica -va, e viceversa, mantenendo costante la neutralita' elettrica e quindi la velocita' di reazione.

Leggi di Kirchoff

Rete elettrica: Interconnessione di generatori e resistenze tramite conduttori filiformi, spesso considerati come ideali (= privi di resistenza)

Caratterizzata da

Nodi Interconnessioni di 3 o + conduttori

Maglie Percorsi chiusi fra nodi

Analisi delle reti (in regime stazionario):

Determinazione delle correnti nei rami e delle differenze di potenziale fra i nodi e un potenziale di riferimento

I legge di Kirchoff:

La somma algebrica delle correnti in un nodo qualsiasi (p es considerando -ve le entranti, +ve le uscenti) e' nulla

$$\sum_k i_k = 0$$

Dimostrazione:

Eq. di continuita':

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Condizioni stazionarie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

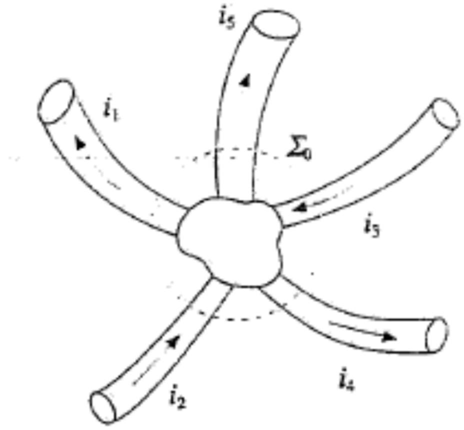
$\rightarrow \boldsymbol{j}$ solenoidale $\rightarrow$ Linee di campo chiuse $\rightarrow$ Assenza di sorgenti/pozzi

$$\rightarrow \Phi_S(\boldsymbol{j}) = 0 \rightarrow \oiint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

S sup. chiusa attorno a un nodo

$$\rightarrow \oiint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_k j_k S_k = \sum_k i_k = 0$$

Esempio:



$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

II legge di Kirchoff

La somma algebrica delle f.e.m. in una maglia qualsiasi e' uguale alla somma algebrica delle d.d.p. ai capi delle resistenze presenti nella maglia.

$$\sum_k i_k R_k = \sum_j E_j$$

Regole sui segni:

Immaginando di percorrere tutta la maglia da un punto qualsiasi fino ad arrivare allo stesso punto, si sceglie convenzionalmente un verso +vo per il percorso lungo tutta la maglia, p es quello orario

1) Se i_k e' nel verso +vo $\rightarrow$ $i_k R_k$ +va, altrimenti –va
2) Se E_j viene attraversata dal polo –vo a quello +vo E_j e' +va, altrimenti –va

Dimostrazione:

Legge di Ohm, generalizzata alla presenza di generatori, per un ramo qualsiasi j:

$$\Delta V_j + \sum_k E_{jk} = R_{Tj} i_j$$

ΔV_j d.d.p. ai capi del ramo

E_{jk} gen. k-esimo del ramo j-esimo

R_{Tj} res. equivalente del ramo

i_j corrente nel ramo

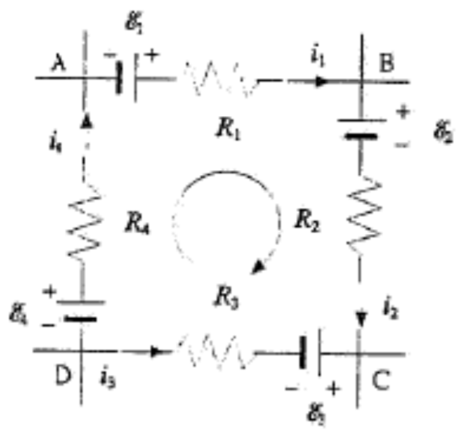
Sommando su tutti i rami della maglia:

$$\rightarrow \sum_j \Delta V_j + \sum_j \sum_k E_{jk} = \sum_j R_{Tj} i_j$$

Maglia chiusa, V statico $\rightarrow \sum_j \Delta V_j = 0$

$$\rightarrow \sum_j \sum_k E_{jk} = \sum_j R_{Tj} i_j$$

Esempio:



$$R_1 i_1 + R_3 i_2 - R_3 i_3 + R_4 i_4 = E_1 - E_2 - E_3 + E_4$$

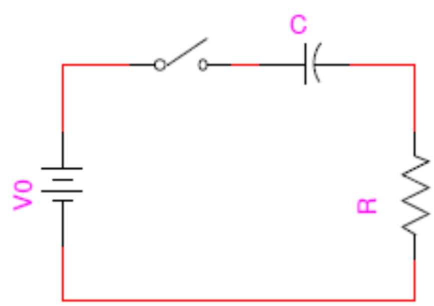
Carica e scarica di una capacita'

Leggi di Kirchoff: applicabili a circuiti in CC

Approssimativamente corrette anche per il caso di correnti lentamente variabili $\rightarrow$ Trascurato l'effetto di campi magnetici variabili

Carica/Scarica 'lenta' di una capacita' tramite una resistenza

1) Carica:



$Q=0$ per $t=0$: carica iniziale nulla

$V_0 - V = Ri,\ V$ ddp istantanea ai capi di R

Incremento in $Q \rightarrow i$ +va

$$dQ = i\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{Q}{C} \\ i &= \frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\} \rightarrow V_0 - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{V_0}{R},\quad RC \equiv \tau$$ cost.di tempo del circuito

Int. gen. omogenea:

$$Q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Int. part. non omogenea:

$$Q(t) = CV_0$$

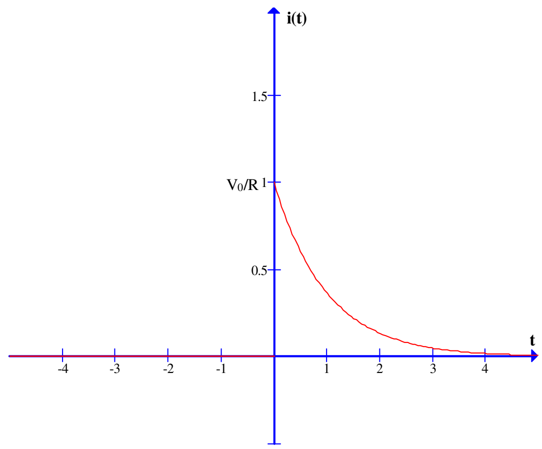
$$\rightarrow Q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + CV_0$$

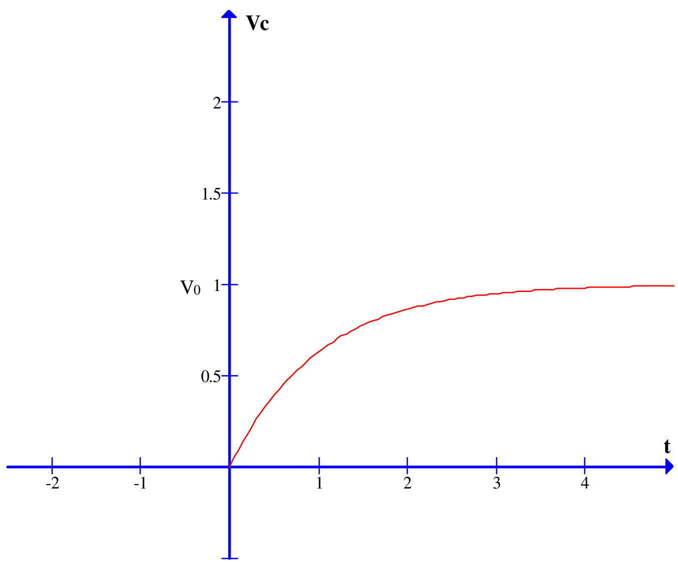
$$Q(0) = 0 \rightarrow A + CV_0 = 0 \rightarrow A = -CV$$

$$\rightarrow Q(t) = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

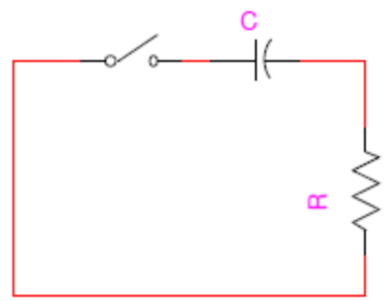
$$\rightarrow V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$





2) Scarica:



$Q = Q_0$ per $t = 0$: carica iniziale

Decremento in $Q \rightarrow i$ $+$va

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{Q}{C} \\ i &= -\frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{Q}{C} = -R\frac{dQ}{dt}$$

$\rightarrow \dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q}{RC} = 0, \quad RC \equiv \tau$ cost. di tempo del circuito

Integrale generale:

$$Q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Q(0) = Q_0 \rightarrow A = Q_0$$

$$\rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \equiv V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow i(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Osservazioni:

Chiusura istantanea dell'interruttore non fisica
$\rightarrow$ Alcune grandezze sono discontinue per $t = 0$
$\rightarrow$ Non esiste la derivata in $t = 0$!
Eq. differenziale valida su un dominio limitato: $t > 0, t < 0$

Usando una successione di chiusure con durata finita
$\rightarrow$ Scomparsa delle discontinuita' OK
$\rightarrow$ Sol. trovata come limite della successione delle soluzioni continue

Curiosita':
Limite della successione di soluzioni continue: discontinuo!

Bilancio energetico nella scarica

En. dissipata nella resistenza:

$$dW = Pdt = \frac{V^2}{R}dt = \frac{V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{R}dt$$

$$\rightarrow W = \int_0^W dW = \int_0^\infty \frac{V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{R}dt = \frac{V_0^2}{R}\left(-\frac{\tau}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)_0^\infty$$

$$\rightarrow W = \frac{V_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

En. elettrostatica iniziale completamente dissipata in R

Bilancio energetico nella carica

Lavoro compiuto dal generatore:

$$dW_{gen} = V_0 dq \rightarrow W_{gen} = Q_0 V_0 = CV_0^2$$

Lavoro compiuto a $V = V_0$ costante!

En. dissipata nella resistenza:

$$dE = P_{Joule}dt = i^2 Rdt = \frac{V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{R}dt$$

$$\rightarrow E = \int_0^{E_{\max}} dE = \int_0^\infty \frac{V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{R}dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{V_0^2}{R}\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty$$

$$\rightarrow E = \frac{V_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

En. spesa dal generatore per meta' dissipata in R;
l'altra meta' come en. elettrostatica in C