

Origine campo magnetico: correnti elettriche

Analogo a campo elettrico: origine nelle cariche elettriche

→ Ricerca delle relazioni matematiche che legano il campo **B** alle correnti

Relazioni determinate in base all'evidenza sperimentale:

1) Assenza di 'poli magnetici'

→ Flusso di **B** attraverso una superficie chiusa sempre nullo

→ $\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$, teo. di Gauss per il magnetismo

Usando il teo. della divergenza:

$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$, V volume racchiuso da Σ

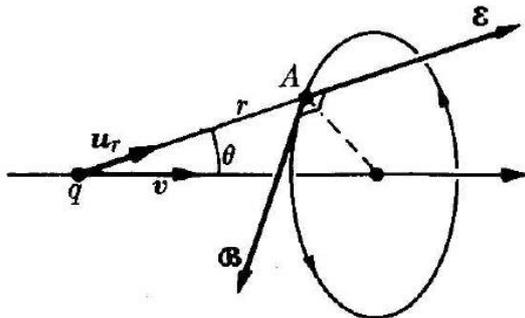
Per l'arbitrarietà di V :

→ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, teo. di Gauss per il magnetismo (forma differenziale)

→ **B** campo solenoidale

2) C. magnetico di una carica in movimento :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$



Espressione approssimata, valida per $v \ll c$

Poiche'

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = (\epsilon_0\mu_0) \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

Contributo di un elemento di corrente filiforme:
sezione S , lunghezza ds

$$i = jS = nqvS$$

$$d\mathbf{B} = \sum_{Sds} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = dN \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = ndV \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

$$qn\mathbf{v} = \mathbf{j}$$

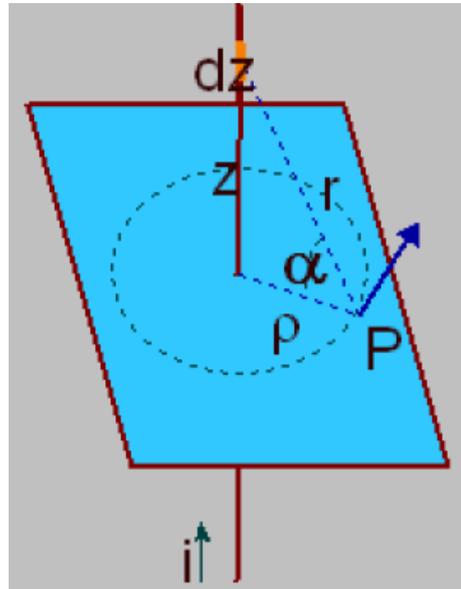
$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} dV$$

$$dV = d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{j}dV = \mathbf{j}(d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})$$

$$\mathbf{j} \parallel d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{j}(d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) = (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}) ds = ids$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ids \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}, \text{ I legge elementare di Laplace}$$

1) C. di un filo rettilineo indefinito percorso da corrente:
 Campo di Biot-Savart



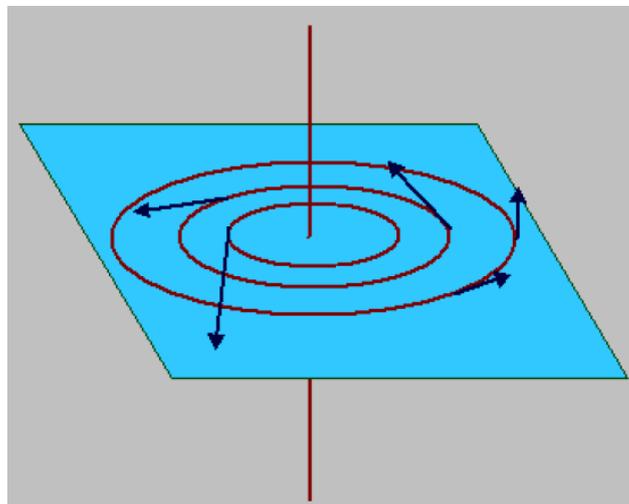
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}| = dz \sin \vartheta = dz \cos \alpha$$

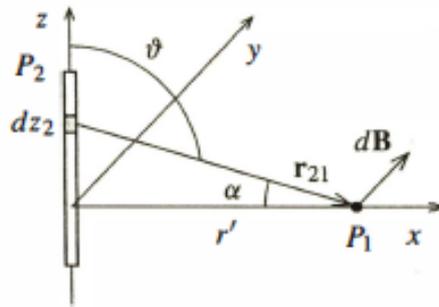
$$r^2 = \rho^2 + z^2, z = \rho \tan \alpha$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \rho^2 (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{\rho^2}{\cos^2 \alpha} \\ dz = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dz}{r^2} = \frac{d\alpha}{\rho}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{\rho} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{\rho} \cdot 2$$



2) Campo di un segmento di filo rettilineo



Simmetria cilindrica: $|\mathbf{B}| = \text{cost}$ a distanza dal filo costante

→ Punto P_1 sull'asse x

$\tan \theta_1 = \frac{L}{2r'}$, apertura angolare del filo visto da P_1

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{21} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \\ d\mathbf{s}_2 = (0, 0, dz_2) \end{cases}$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz_2 \sin \theta}{r_{21}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz_2 \cos \alpha}{r_{21}^2}$$

$$r_{21} = \frac{r'}{\cos \alpha}$$

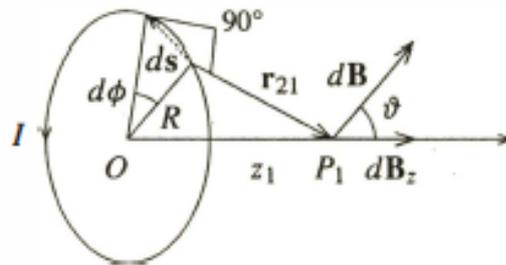
$$z_2 = r' \tan \alpha \rightarrow dz_2 = \frac{r'}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz_2 \cos \alpha}{r_{21}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{r'^2} \frac{r'}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r'} d\alpha$$

C. totale in P_1 :

$$B = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r'} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r'} \sin \alpha \Big|_{-\theta_1}^{+\theta_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} 2 \sin \theta_1$$

3) Spira circolare (punti sull'asse di simmetria)



Simmetria circolare: C. totale = Σ contributi elementari dalla spira

Punti sull'asse:

Componente \perp all'asse da' risultato 0 quando integrata sulla spira
(elementi opposti danno contributi opposti)

$\rightarrow \mathbf{B} \parallel$ asse $\rightarrow B \equiv B_z$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r_{21}^2} \cos \theta$$
 contributo di un elemento di spira

$$r_{21}^2 = R^2 + z^2$$

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r_{21}^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} ds$$

$ds = R d\phi$ elemento di spira

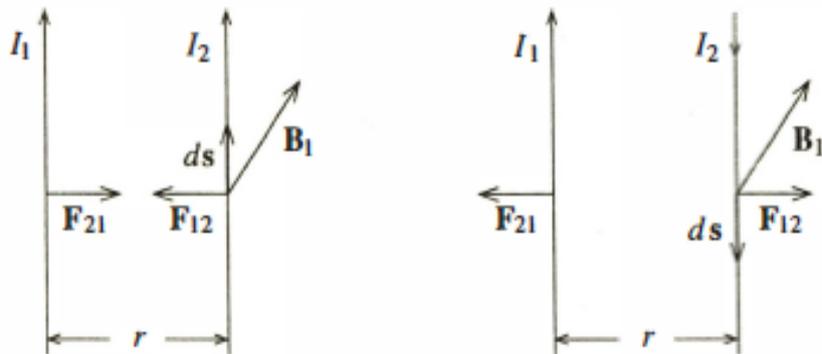
$$\rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi$$

$$\rightarrow B = B_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$I\pi R^2 = \mu$ mom. dipolo magnetico della spira

$$\rightarrow B = B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Forza fra due fili paralleli:



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$dF_{12} = I_2 ds B_1$$

$$\rightarrow \frac{dF_{12}}{ds} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \text{ forza/unita' di lunghezza}$$

F. attrattiva \leftrightarrow Correnti concordi

F. repulsiva \leftrightarrow Correnti discordi

Usata per la definizione dell' ampere

Integrale di linea di \mathbf{B} lungo una circonferenza di raggio r concentrica al filo (spira amperiana):

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint_C \hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \int_0^{2\pi} r d\theta = \mu_0 i$$

Estensione al caso in cui Γ e' una curva chiusa qualsiasi *attorno* al filo:

Elemento di linea in componenti cilindriche, asse $z \parallel$ filo

$$d\mathbf{s} = r d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + dr \hat{\mathbf{u}}_r + dz \hat{\mathbf{u}}_z,$$

$$\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{u}}_\theta, \mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_z$$

$$\rightarrow \oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta r d\theta = \int_0^{2\pi} B r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = \mu_0 I$$

Se Γ e' una curva chiusa *esterna* al filo (caso di una curva piana):

Angolo infinitesimo $d\theta$ dal filo sulla curva intercetta due archi ds_1, ds_2

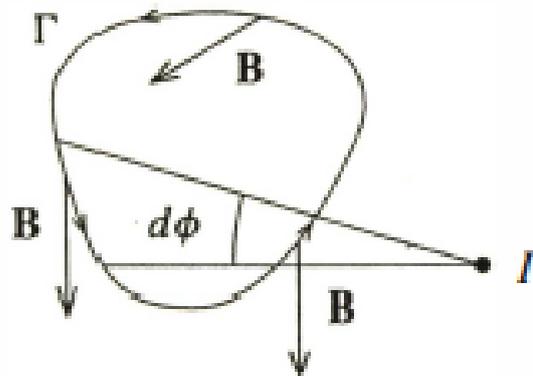
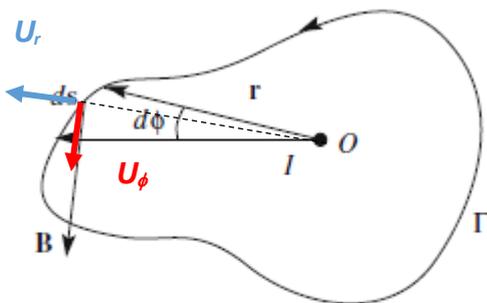
Versi opposti rispetto a \mathbf{B} per i due $\rightarrow \mathbf{B} \cdot ds_1 = -\mathbf{B} \cdot ds_2$

\rightarrow Contributo totale = 0

$\rightarrow \oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$, Γ curva chiusa esterna al filo

\rightarrow Teo. di Ampere:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I, I \text{ corrente totale } \textit{concatenata} \text{ a } \Gamma$$



Teo. di Ampere valido anche per circuiti non rettilinei

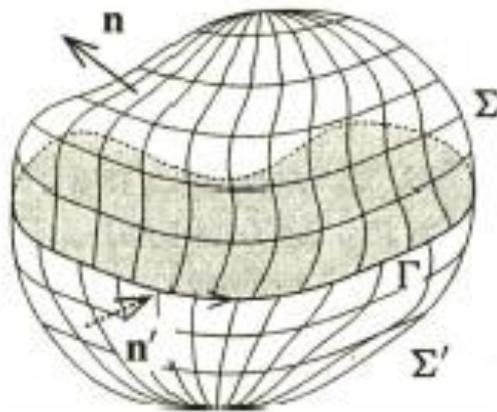
Estensione al caso di correnti non filiformi:

$$I_{conc} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma, \quad \Sigma \text{ sup. appoggiata su } \Gamma$$

Integrale indipendente da Σ :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

Infatti:



$\Sigma + \Sigma' = \text{sup. chiusa}$

Punto per punto, su Σ' :

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}'$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = \oint_{\Sigma + \Sigma'} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \text{caso stazionario (} \rightarrow \text{ solo campi statici)}$$

$$\rightarrow 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \oint_{\Sigma + \Sigma'} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma'$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma, \quad \text{teo. di Ampere in forma generale}$$

Teo. del rotore:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma, \quad \Sigma \text{ arbitraria}$$

$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, teo. di Ampere in forma differenziale

Valido per campi statici

Riassunto delle proprietà del campo magnetostatico nel vuoto:

Forma integrale

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

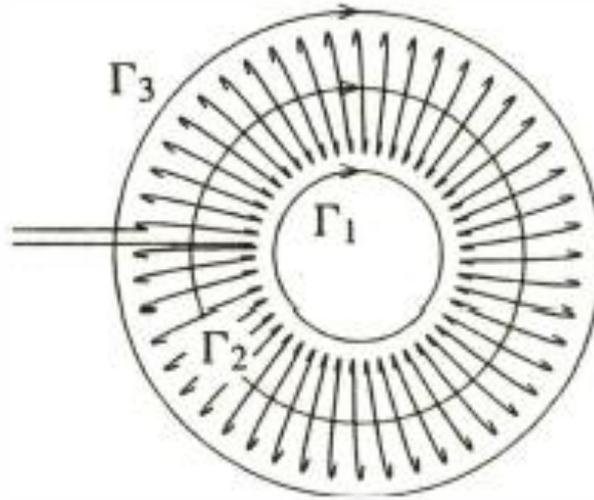
Nota: Teo. di Helmholtz

Ogni campo vettoriale che abbia un buon comportamento all' ∞ e' completamente definito se sono dati la divergenza e il rotore

Applicazioni della legge di Ampere:

Utile per sistemi ad elevata simmetria (come legge di Gauss in elettrostatica)

1) Solenoide toroidale



Linee di campo: curve chiuse

Simmetria del problema \rightarrow circonferenze concentriche al toroide

$\rightarrow \mathbf{B} \parallel$ linea di campo, su cui $r = \text{cost} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}(r)$

Applicando la legge di Ampere:

Spire amperiane Γ_1 e Γ_3 :

Γ_1 : nessuna corrente concatenata

Γ_3 : corrente entrante = corrente uscente

\rightarrow corrente concatenata totale = 0 $\rightarrow \oint_{\Gamma_1, \Gamma_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

\rightarrow C. magnetico nullo fuori dal solenoide

Spira amperiana Γ_2 :

$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 NI$, N n. totale di spire

$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 NI \rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, R_1 < r < R_2$

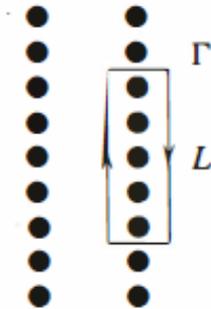
$R_2 - R_1 \ll R_1, R_2 \rightarrow 2\pi r \sim$ lunghezza solenoide $\rightarrow B \approx \mu_0 nI$, n n.spire/lunghezza

2) Solenoide rettilineo

Applicando la legge di Ampere alla spira Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = BL = \mu_0 nIL, \text{ altri lati di } \Gamma \text{ danno contributo } 0$$

$\rightarrow B = \mu_0 nI$, uniforme dentro il solenoide



~ Solenoide toroidale sottile 'aperto', lunghezza $\rightarrow \infty$

$\rightarrow B = \mu_0 nI$ dentro il solenoide, $B = 0$ fuori

Nota: $[nI] = [I][L^{-1}]$, corrente/lunghezza

Avvolgimento ~ Corrente superficiale attorno alla sup. del solenoide

Corrente totale:

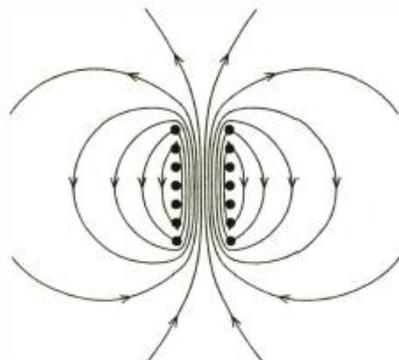
$$\left. \begin{array}{l} I_{tot} = NI = nIL \\ I_{tot} = J_{sup} L \end{array} \right\} \rightarrow J_{sup} = nI, \text{ densita' di corrente superficiale equivalente}$$

Nei due casi considerati:

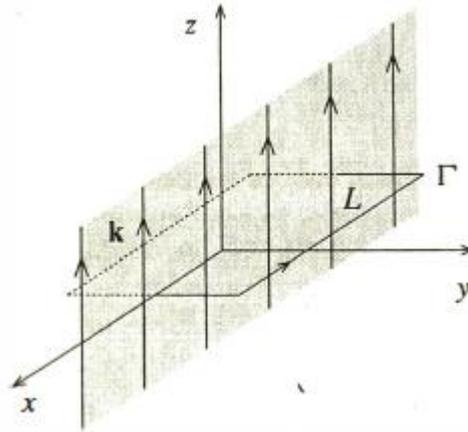
\mathbf{B} ha una discontinuita' fra esterno e interno del solenoide

$$\Delta B = J_{sup}$$

Campo reale:



3) Piano percorso da corrente superficiale uniforme, densità k



Simmetria del problema: linee di campo = rette \parallel asse x
(linee 'chiuse' attorno alla corrente - chiusura all' ∞)

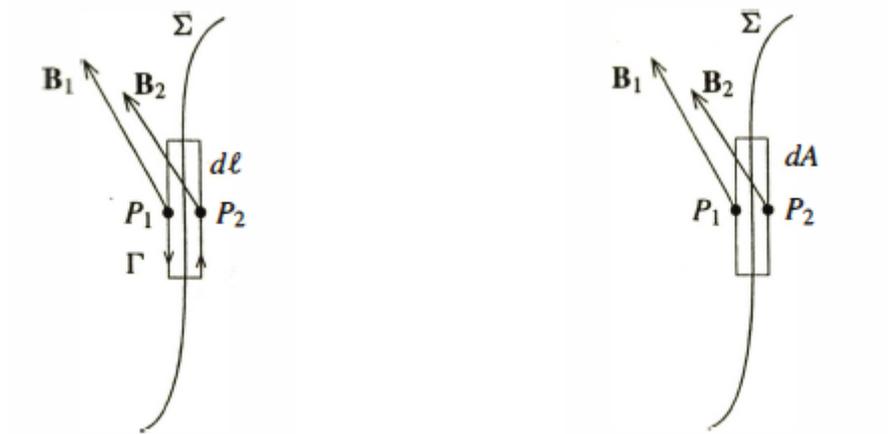
Spira amperiana = rettangolo in figura

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B2L = \mu_0 kL \rightarrow B = \pm \frac{\mu_0 k}{2}, \text{ segni opposti nei due semipiani}$$

Nota: Discontinuità $\Delta B = \mu_0 kE$ come al solito

Discontinuita'/Continuita' di \mathbf{B} attraverso uno strato di corrente

Distinguendo le componenti normale/tangenziale:



Componente tangenziale:

Teo. di Ampere - spira Γ

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = [B_{\parallel}(P_2) - B_{\parallel}(P_1)] dl = \mu_0 k dl$$

$$\rightarrow \Delta B_{\parallel} = \mu_0 k$$

Componente normale:

Teo. di Gauss - sup. A

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = [B_{\perp}(P_2) - B_{\perp}(P_1)] dA = 0$$

$$\rightarrow \Delta B_{\perp} = 0$$