

Origine campo magnetico: correnti elettriche

Analogo a campo elettrico: origine nelle cariche elettriche

→ Ricerca delle relazioni matematiche che legano il campo **B** alle correnti

Relazioni determinate in base all'evidenza sperimentale:

1) Assenza di 'poli magnetici'

→ Flusso di **B** attraverso una superficie chiusa sempre nullo

→  $\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$ , teo. di Gauss per il magnetismo

Usando il teo. della divergenza:

$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$ ,  $V$  volume racchiuso da  $\Sigma$

Per l'arbitrarietà di  $V$ :

→  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , teo. di Gauss per il magnetismo (forma differenziale)

→ **B** campo solenoidale

2) Proprietà del campo di una corrente filiforme

dedotte da osservazioni ed esperienze:

Linee del campo generato da un filo rettilineo percorso da corrente:

circonferenze concentriche e  $\perp$  al filo;

$$B \propto \frac{I}{r}$$

→  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , legge di Biot-Savart

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  nel SI, costante universale

→  $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ ,  $\Gamma$  circonferenza c.s.

Estensione di

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

al caso in cui  $\Gamma$  e' una curva chiusa qualsiasi *attorno* al filo:

Infatti:

Elemento di linea in componenti cilindriche, asse  $z \parallel$  filo

$$d\mathbf{s} = r d\theta \hat{\mathbf{u}}_{\theta} + dr \hat{\mathbf{u}}_r + dz \hat{\mathbf{u}}_z,$$

$$\rightarrow \mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{u}}_{\theta}, \mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_z \rightarrow d\mathbf{s} = r d\theta \hat{\mathbf{u}}_{\theta}$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\theta} r d\theta = Br \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B = \mu_0 I$$

Se  $\Gamma$  e' una curva chiusa *esterna* al filo (caso di una curva piana):

Angolo infinitesimo  $d\theta$  dal filo sulla curva intercetta due archi  $ds_1, ds_2$

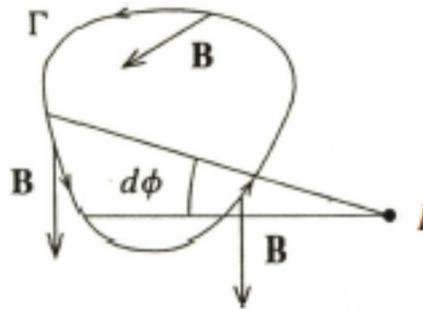
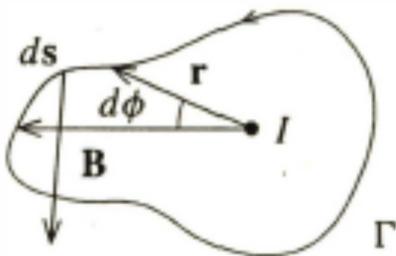
Versi opposti rispetto a  $\mathbf{B}$  per i due  $\rightarrow \mathbf{B} \cdot ds_1 = -\mathbf{B} \cdot ds_2$

$\rightarrow$  Contributo totale = 0

$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ ,  $\Gamma$  curva chiusa esterna al filo

$\rightarrow$  Teo. di Ampere:

$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ ,  $I$  corrente totale *concatenata* al filo



Teo. di Ampere valido anche per circuiti non rettilinei

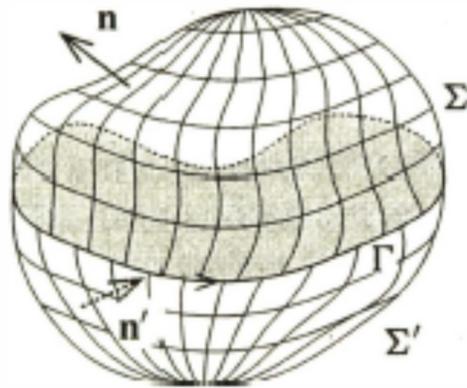
Estensione al caso di correnti non filiformi:

$$I_{conc} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma, \quad \Sigma \text{ sup. appoggiata su } \Gamma$$

Integrale indipendente da  $\Sigma$ :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

Infatti:



$\Sigma + \Sigma' = \text{sup. chiusa}$

Punto per punto, su  $\Sigma'$ :

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}'$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = \oint_{\Sigma + \Sigma'} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \text{ caso stazionario (} \rightarrow \text{ solo campi statici)}$$

$$\rightarrow 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \oint_{\Sigma + \Sigma'} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma'$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma, \text{ teo. di Ampere in forma generale}$$

Teo. del rotore:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma, \quad \Sigma \text{ arbitraria}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \text{ teo. di Ampere in forma differenziale}$$

Valido per campi statici

Riassunto delle proprietà del campo magnetostatico nel vuoto:

Forma integrale

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

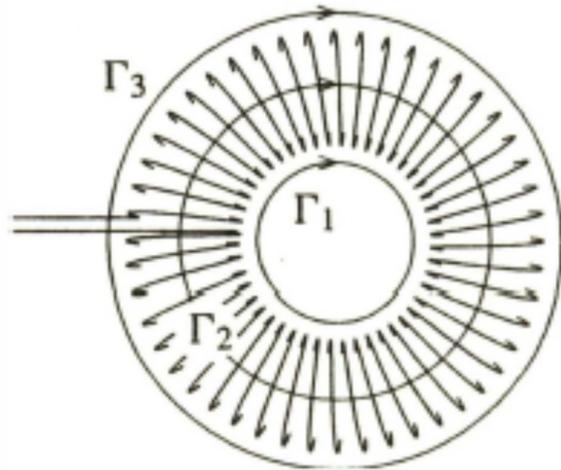
Nota: Teo. di Helmholtz

Ogni campo vettoriale che abbia un buon comportamento all'  $\infty$  e' completamente definito se sono dati la divergenza e il rotore

Applicazioni della legge di Ampere:

Utile per sistemi ad elevata simmetria (come legge di Gauss in elettrostatica)

1) Solenoide toroidale



Linee di campo: curve chiuse

Simmetria del problema  $\rightarrow$  circonferenze concentriche al toroide

$\rightarrow \mathbf{B} \parallel$  linea di campo, su cui  $r = \text{cost} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}(r)$

Applicando la legge di Ampere:

Spire amperiane  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ :

$\Gamma_1$ : nessuna corrente concatenata

$\Gamma_3$ : corrente entrante = corrente uscente

$\rightarrow$  corrente concatenata totale = 0  $\rightarrow \oint_{\Gamma_1, \Gamma_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

$\rightarrow$  C. magnetico nullo fuori dal solenoide

Spira amperiana  $\Gamma_2$ :

$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 NI$ ,  $N$  n. totale di spire

$\rightarrow B2\pi r = \mu_0 NI \rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ ,  $R_1 < r < R_2$

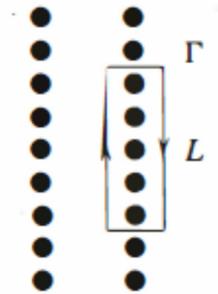
$R_2 - R_1 \ll R_1, R_2 \rightarrow 2\pi r \sim$  lunghezza solenoide  $\rightarrow B \approx \mu_0 nI$ ,  $n$  n.spire/lunghezza

## 2) Solenoide rettilineo

Applicando la legge di Ampere alla spira  $\Gamma$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = BL = \mu_0 nIL, \text{ altri lati di } \Gamma \text{ danno contributo } 0$$

$\rightarrow B = \mu_0 nI$ , uniforme dentro il solenoide



~ Solenoide toroidale sottile 'aperto', lunghezza  $\rightarrow \infty$

$\rightarrow B = \mu_0 nI$  dentro il solenoide,  $B = 0$  fuori

Nota:  $[nI] = [I][L^{-1}]$ , corrente/lunghezza

Avvolgimento ~ Corrente superficiale attorno alla sup. del solenoide

Corrente totale:

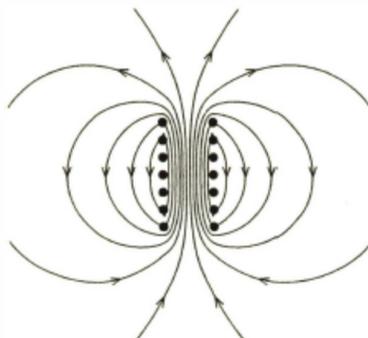
$$\left. \begin{aligned} I_{tot} &= NI = nIL \\ I_{tot} &= J_{sup} L \end{aligned} \right\} \rightarrow J_{sup} = nI, \text{ densita' di corrente superficiale equivalente}$$

Nei due casi considerati:

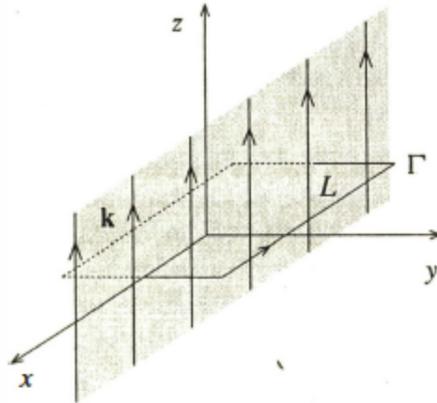
$\mathbf{B}$  ha una discontinuita' fra esterno e interno del solenoide

$$\Delta B = J_{sup}$$

Campo reale:



3) Piano percorso da corrente superficiale uniforme, densita'  $k$



Simmetria del problema: linee di campo = rette  $\parallel$  asse  $x$

(linee 'chiusse' attorno alla corrente - chiusura all' $\infty$ )

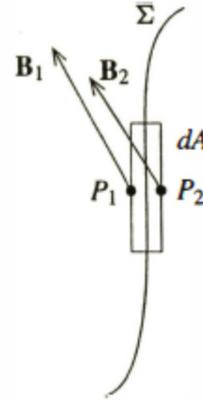
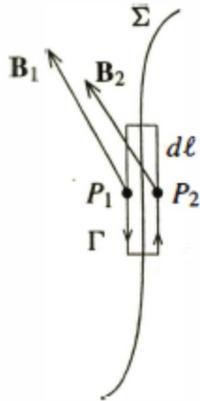
Spira amperiana = rettangolo in figura

$$\rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B2L = \mu_0 kL \rightarrow B = \pm \frac{\mu_0 k}{2}, \text{ segni opposti nei due semipiani}$$

Nota: Discontinuita'  $\Delta B = \mu_0 k$  come al solito

Discontinuita'/Continuita' di  $\mathbf{B}$  attraverso uno strato di corrente

Distinguendo le componenti normale/tangenziale:



Componente tangenziale:

Teo. di Ampere - spira  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = [B_{\parallel}(P_2) - B_{\parallel}(P_1)] dl = \mu_0 k dl$$

$$\rightarrow \Delta B_{\parallel} = \mu_0 k$$

Componente normale:

Teo. di Gauss - sup.  $A$

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = [B_{\perp}(P_2) - B_{\perp}(P_1)] dA = 0$$

$$\rightarrow \Delta B_{\perp} = 0$$