Esperienze di Oersted & al $\sim$1820:

Corrente $\rightarrow$ C. magnetico

Esperienze di Faraday $\sim$1830:

C. magnetico $\rightarrow$ Corrente ??

Risultato:

~~C. magnetico statico $\rightarrow$ Corrente~~

C. magnetico variabile $\rightarrow$ Corrente

Corrente indotta:

1) Circuito in moto, c. magnetico stazionario non omogeneo
2) Circuito di area/forma variabile nel tempo, anche c. omogeneo
3) Magnete con c. non omogeneo, in moto rispetto a circuito stazionario
4) Corrente variabile in circuito n. 2, vicino a circuito stazionario n. 1

$\rightarrow$ 1) & 2): Circuito, o sua parte, in moto rispetto a c. magnetico costante

$\rightarrow$ 3) & 4): Circuito fermo in c. magnetico variabile

In tutti i casi:

$\mathbf{F}$ forza agente sui portatori liberi

$$\text{f.e.m.} \equiv \mathcal{E} = \oint_{circuito} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

f.e.m. indotta $\rightarrow$ corrente se c'e' un circuito conduttore

Delocalizzata lungo tutto il circuito

Origine?

Comprensibile nel I caso

'Incomprensibile' nel II caso

Φ flusso di $\mathbf{B}$ attraverso il circuito:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

Flusso concatenato, indipendente da Σ purche' appoggi sul circuito

Infatti: $\Sigma + \Sigma' =$ sup. chiusa

Punto per punto, su Σ':

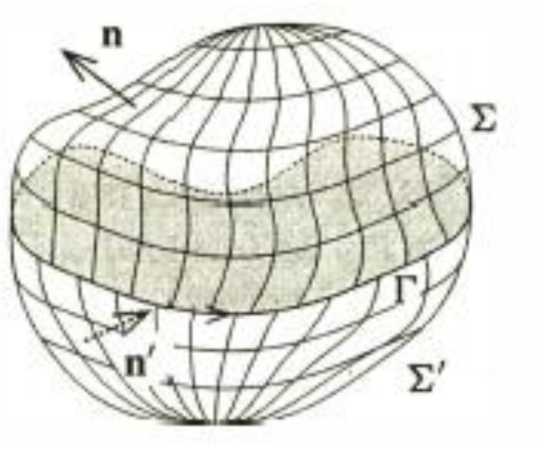
$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}'$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = \oint_{\Sigma+\Sigma'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

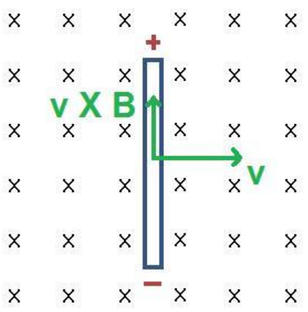
$$\rightarrow 0 = \int_{V} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_{\Sigma+\Sigma'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma'$$



Esperimento 'ideale':

Sbarra conduttrice in moto in c. magnetico costante



Riferimento 'del laboratorio':

Forza di Lorentz sui portatori liberi: $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$\rightarrow$ Accumulo di portatori di segno opposto alle estremita'

$\rightarrow$ C. elettrostatico interno uniforme

$\rightarrow$ Forza elettrica interna sui portatori

$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$

$\rightarrow$ Equilibrio:

$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_m \rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$\rightarrow$ C. elettrico interno non nullo $=$ Uniforme

$\rightarrow$ ddp indotta ai capi della sbarra: $\Delta\phi = -vBl$

$\rightarrow$ C. elettrico esterno non nullo $\sim$ Dipolo

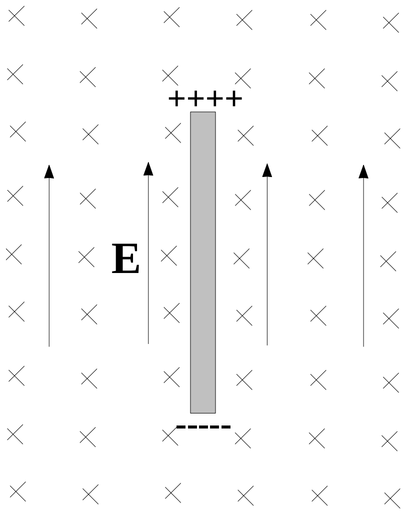
Es Aereo in volo orizzontale

$v = 800 \quad kmh^{-1} \simeq 222 \quad ms^{-1}$

$B = 510^{-5} \quad T$ c. magnetico terrestre, componente verticale

$l = 50 \quad m$ apertura alare

$\rightarrow \Delta\phi \simeq 0.22 \ V$



Riferimento 'della sbarra':

Accumulo di portatori di segno opposto alle estremita'

(NB: fatto indipendente dal riferimento)

Forza di Lorentz sui portatori liberi: $\mathbf{F}_m = 0$

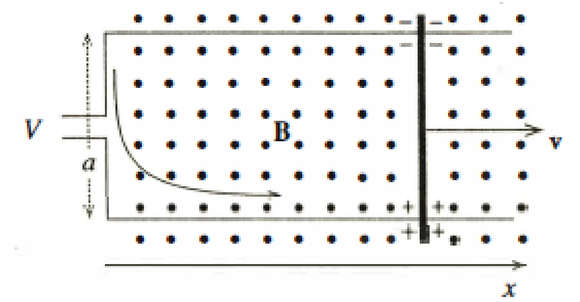
Inoltre: C. elettrostatico interno $= 0$ (conduttore in quiete)

$\rightarrow$ Forza elettrica esterna sui portatori

$\rightarrow$ C. elettrico esterno non nullo $\sim$ uniforme $+$ dipolo

I caso: C. magnetico costante, circuito in movimento/deformazione

Esempio



Rotaie conduttrici

Sbarra conduttrice, lunga a, resistenza R, vel.$\mathbf{v}$

Regola del flusso: flusso variabile $\leftrightarrow$ circuito cambia dimensione

$\Phi = Bax$

$$\frac{d\Phi}{dt} = Ba\frac{dx}{dt} = Bav = -\mathcal{E} = -fem$$

Corrente:

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} = -\frac{Bav}{R}$$

Segno $-$ $\rightarrow$ corrente in senso *orario*

$\rightarrow$ c. magnetico *opposto* a quello fisso: legge di Lenz

Interpretazione in termini di forza di Lorentz:

Portatori liberi in sbarretta

$\rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$

$\rightarrow$ Spostamento portatori (*senza* accumulo di carica)

$\rightarrow$ Lavoro sul singolo portatore che si muove nella sbarra:

$W = -Fa = -qvBa$

$\rightarrow$ Forza elettromotrice indotta:

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = -vBa$$

Risultato generalizzabile:

f.e.m. indotta conseguenza della forza di Lorentz

Derivazione legge di Faraday da effetto forza di Lorentz
su conduttore in moto:

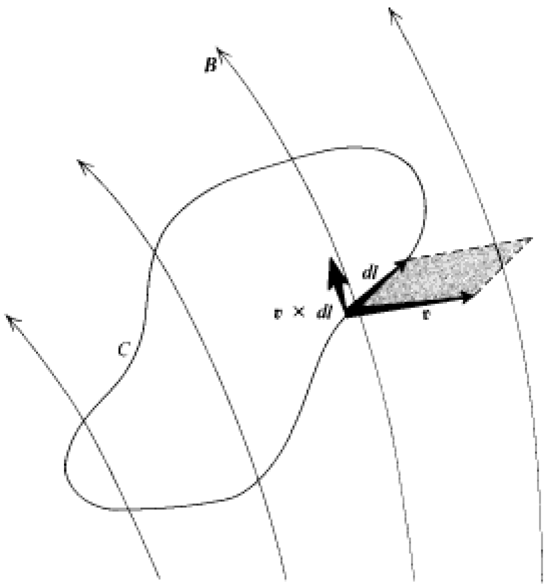
Circuito C in moto
(eventualmente anche con cambiamento di area)
$\mathbf{v}$ vel. elemento di linea $d\mathbf{l}$
fem indotta:

$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l},$ lavoro campo elettromotore

$\varepsilon = -\oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}),$ proprieta' doppio prodotto misto

$\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$: area orientata spazzata dall'elemento di linea $d\mathbf{l}$ in $1\ s$
$\rightarrow \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$ incremento nell'unita' di tempo
del flusso elementare concatenato a C causato dal moto di $d\mathbf{l}$

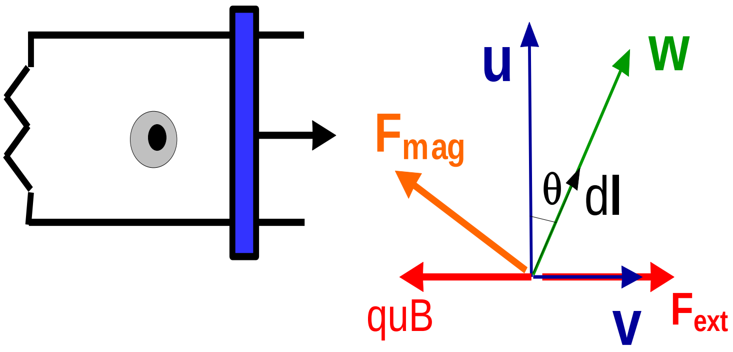
$$\rightarrow \varepsilon = -\oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Forza di Lorentz: mantiene in movimento le cariche

Corrente: richiede lavoro, vista la resistenza del conduttore

Chi sta compiendo lavoro sulle cariche, visto che $\mathbf{F}_m$ non compie lavoro?



Quando circola corrente:

$\mathbf{u}$ vel. di deriva

$\mathbf{v}$ vel. sbarretta

$\mathbf{w}$ vel. totale portatori rispetto a $\mathbf{B}$

$\mathbf{F}_{ext}$ mantiene in movimento la sbarretta

$\mathbf{F}_m$ forza magnetica $\perp \mathbf{w}$

Lavoro elementare:

$$dW = F_{ext} dl \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = F_{ext} dl \sin\theta$$

$$F_{ext} = -quB$$

$$\frac{v}{u} = \tan\theta \rightarrow u = \frac{v}{\tan\theta}$$

$dx = dl\cos\theta$, spostamento elementare lungo la sbarretta

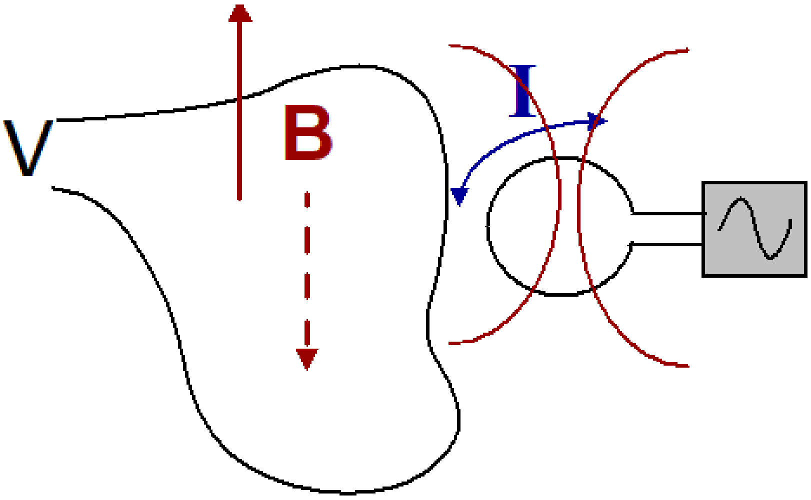
$$\rightarrow dW = -quB\frac{dx}{\cos\theta}\sin\theta = -qBdx\tan\theta\frac{v}{\tan\theta} = -qvBdx$$

$$\rightarrow d\varepsilon = -vBdx$$

$\rightarrow$ Forza elettromotrice: alimentata da $\mathbf{F}_{ext}$

II caso: C. magnetico variabile, circuito fermo

Esempio



Spira piana, area S, resistenza R in

C. magnetico variabile $\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}_0 \cos \omega t$

Angolo α fra normale alla spira e $\mathbf{B}_0$

Nessuna interpretazione in termini di forza di Lorentz

Regola del flusso:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\rightarrow \varepsilon=-\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma=-\frac{d}{dt}\left(B_0 S\cos\alpha\cos\omega t\right)$$

$$\varepsilon=B_0 S\cos\alpha\sin\omega t$$

$$\rightarrow i(t)=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{B_0 S\cos\alpha}{R}\sin\omega t$$

Regola del flusso:

f.e.m. $\leftrightarrow$ corrente $\leftrightarrow$ Presenza di una forza sui portatori liberi

Portatori fermi: $\mathbf{v} = 0 \rightarrow$ ~~Forza magnetica~~

$\rightarrow$ Ipotesi: Forza elettrica

$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

$$\mathcal{E} = \oint_{circuito} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$\rightarrow \mathbf{E}$ c. elettrico non conservativo !!!

$$\oint_{\text{circuito}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma\right) = -\int_{\text{superficie}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

Teo. del rotore:

$$\oint_{\text{circuito}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{superficie}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$$\rightarrow \int_{\text{superficie}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = -\int_{\text{superficie}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Due origini indipendenti per f.e.m. indotta:

$$\begin{cases}\text{Forza di Lorentz su conduttori in moto}\\ \text{Campo elettrico originato da c.magnetico variabile}\end{cases}$$

Cause diverse e indipendenti $\rightarrow$ Stesso effetto

Coincidenza sospetta...(© A. Einstein,1905):

$$\begin{cases}\oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & \text{c. elettromotore da f. di Lorentz}\\ \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & \text{c. elettrico non conservativo}\end{cases}$$

$\rightarrow$ Relativita' ristretta: Trasformazioni di Lorentz mescolano componenti di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ in riferimenti diversi

Per i piu' curiosi:

Trasf. di Lorentz dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

In S: $\mathbf{E}=0,\ \mathbf{B}=B_z\hat{\mathbf{k}}$

Per $\mathbf{v}\parallel\hat{\mathbf{i}}$:

$$E_x' = E_x = 0$$

$$E_y' = \gamma(E_y - vB_z) = -\gamma v B_z \simeq -vB_z, v \ll c$$

$$E_z' = \gamma(E_z + vB_y) = +\gamma v B_y = 0$$

$$B_x' = B_x = 0$$

$$B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) = 0$$

$$B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = +\gamma B_z \simeq B_z, v \ll c$$

In S':

$\rightarrow \mathbf{B}' \simeq \mathbf{B}\ +$ comparsa di $\mathbf{E}' \simeq -vB_z\hat{\mathbf{j}}$

C. elettrico nel vuoto:

Definito da contributi alla div e al rot

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

cariche elettriche

c. magnetici variabili

In generale *non* derivabile da un pot. scalare:

solo nel caso di c. elettrostatico

Si osservi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Quindi, in presenza di cariche *e* c. magnetici variabili:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$\mathbf{E}$ descritto da *due* potenziali

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$\mathbf{B}$ descritto da un solo potenziale $\left(\leftarrow\right.$niente cariche magnetiche$\left.\right)$

Esempio: Bobina N spire, sez. quadrata, area S, resistenza R

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \frac{t}{t_0}, \quad 0 < t < t_0$$

$$\to \Phi(t) = NSB_0 \frac{t}{t_0} \to \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(NSB_0 \frac{t}{t_0}\right) = -\frac{NSB_0}{t_0}$$

$$\to i(t) = \frac{NSB_0}{Rt_0}$$

Carica totale:

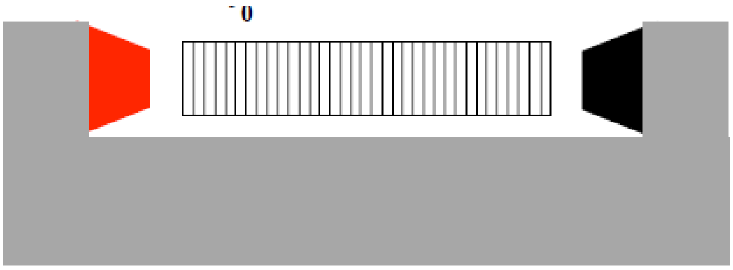
$$Q = \int i(t)\,dt = \frac{NSB_0}{Rt_0}\int_0^{t_0} dt = \frac{NSB_0}{R}$$

Pot. istantanea dissipata in R:

$$P = i\varepsilon = \frac{NSB_0}{Rt_0}\frac{NSB_0}{t_0} = \frac{1}{R}\left(\frac{NSB_0}{t_0}\right)^2$$

Lavoro totale:

$$W = Pt_0 = \frac{(NSB_0)^2}{Rt_0}$$



Conduttore fermo, c. magnetico variabile:

fem da c. elettrico indotto, non conservativo

Esempio: Spira quadrata rotante in c. magnetico

Lato L, vel. angolare ω, resistenza R

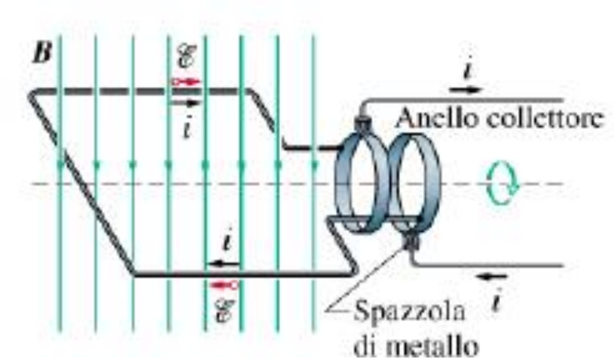
$$\Phi(t) = B_0 L^2 \cos\alpha = B_0 L^2 \cos\omega t$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 L^2 \omega \sin\omega t \rightarrow i(t) = \frac{B_0 L^2 \omega}{R} \sin\omega t$$

$$\varepsilon_{\max} = B_0 L^2 \omega$$

$$P(t) = \varepsilon i = \frac{\left(B_0 L^2 \omega\right)^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{\varepsilon_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t$$

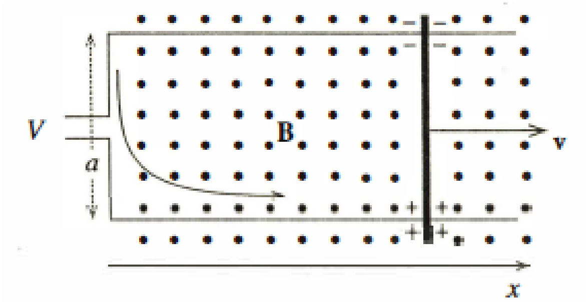
$\langle P \rangle = \dfrac{\varepsilon_{\max}^2}{2R}$ su un periodo



Conduttore in movimento, c. magnetico costante:

fem da campo elettromotore della forza di Lorentz

Esempio: Prototipo di generatore



Regola del flusso: flusso variabile $\leftrightarrow$ circuito cambia dimensione

$\Phi = Bax$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav$$

Corrente:

$$i = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{1}{R} = -\frac{Bav}{R}$$

Segno $-$ $\rightarrow$ corrente in senso *orario*

$\rightarrow$ c. magnetico *opposto* a quello fisso: legge di Lenz

Forza magnetica:

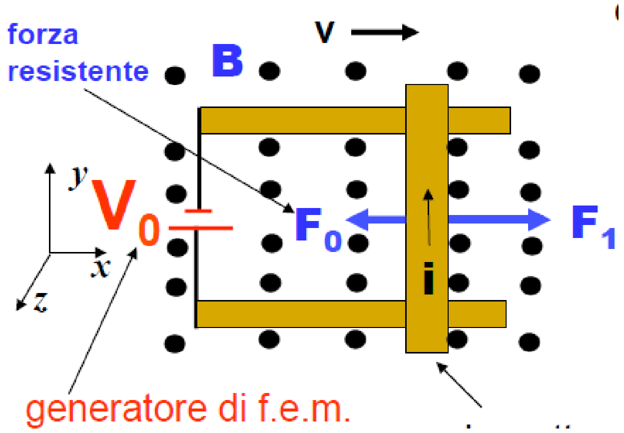
$$d\mathbf{F}_m = id\mathbf{l}\times\mathbf{B} \rightarrow F_m = -iaB = -\frac{B^2a^2v}{R},$$ frenante

$$\rightarrow \mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_m \rightarrow F_{ext} = \frac{B^2a^2v}{R},$$ per mantenere v costante

$$\rightarrow P_{mecc} = F_{ext}v = \frac{B^2a^2v^2}{R}$$

$$\rightarrow P_{Joule} = \varepsilon i = \frac{B^2a^2v^2}{R} = P_{mecc},$$ dissipata in R

Esempio: Prototipo di motore elettrico



$$x = vt$$

$$\Phi = Blx = Blvt$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

$$\rightarrow i = \frac{V_0 + \varepsilon}{R} = \frac{V_0 - Blv}{R}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 - F_0 = iBl - F_0$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{iBl - F_0}{m} = \frac{(V_0 - Blv)Bl}{mR} - \frac{F_0}{m} = \underbrace{\frac{V_0 Bl}{mR} - \frac{F_0}{m}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{B^2 l^2}{mR}}_{\beta} v$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int_0^t dt \rightarrow -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta v)\Big|_{v_0}^{v} = t$$

$$\ln\frac{\alpha - \beta v}{\alpha - \beta v_0} = -\beta t \rightarrow \alpha - \beta v = (\alpha - \beta v_0)e^{-\beta t}$$

$$\rightarrow v = \frac{\alpha}{\beta} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - v_0\right)e^{-\beta t}, \quad \tau = \frac{1}{\beta} \quad \text{cost. di tempo}$$

$$\rightarrow v = \left(\frac{V_0 Bl}{mR} - \frac{F_0}{m}\right)\frac{mR}{B^2 l^2} - \left(\left(\frac{V_0 Bl}{mR} - \frac{F_0}{m}\right)\frac{mR}{B^2 l^2} - v_0\right)e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}t}$$

$$\rightarrow v = \underbrace{\left(\frac{V_0}{Bl} - \frac{F_0 R}{B^2 l^2}\right)}_{v_\infty} - \left[\underbrace{\left(\frac{V_0}{Bl} - \frac{F_0 R}{B^2 l^2}\right)}_{v_\infty} - v_0\right]e^{-\underbrace{\frac{B^2 l^2}{mR}}_{1/\tau}t}$$

$$\rightarrow v = v_\infty - (v_\infty - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

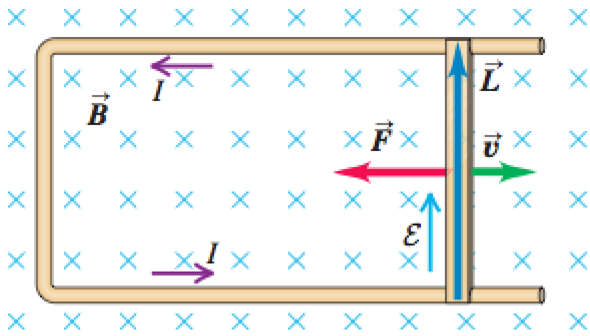
Se $v_0 = 0$:

$$\rightarrow \varepsilon_\infty = -Blv_\infty = -V_0 + \frac{RF_0}{Bl}$$

$$\rightarrow i_\infty = \frac{V_0 - v_\infty Bl}{R} = \frac{F_0}{Bl}$$

$\rightarrow P_\infty = V_0 i_\infty = \underset{Joule}{Ri_\infty^2} + \underset{Mecc}{F_0 v_\infty}$, pot. spesa dal generatore = cost. a tempi lunghi

Esempio: Prototipo di freno a induzione



$$F = .-iLB$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = iR$$

$$\rightarrow i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = BLv = BL\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow i = -\frac{1}{R}BLv$$

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}BLBLv = \frac{B^2L^2}{R}v$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{B^2L^2}{mR}v = 0$$

$$\rightarrow v = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$$