

Esperienze di Oersted & al ~ 1820:

Corrente → C. magnetico

Esperienze di Faraday ~ 1830:

C. magnetico → Corrente ??

Risultato:

~~C. magnetico statico → Corrente~~

C. magnetico variabile → Corrente

Corrente indotta:

- 1) Circuito in moto, c. magnetico stazionario non omogeneo
  - 2) Circuito di area/forma variabile nel tempo, anche c. omogeneo
  - 3) Magnete con c. non omogeneo, in moto rispetto a circuito stazionario
  - 4) Corrente variabile in circuito n. 2, vicino a circuito stazionario n. 1
- 1) & 2): Circuito, o sua parte, in moto rispetto a c. magnetico costante  
→ 2) & 3): Circuito fermo in c. magnetico variabile

Di fatto:

f.e.m. indotta nel circuito, che poi causa corrente

In tutti i casi:

**F** forza agente sui portatori liberi

$$\text{f.e.m.} \equiv \mathcal{E} = \oint_{\text{circuito}} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi$  flusso di **B** attraverso il circuito:

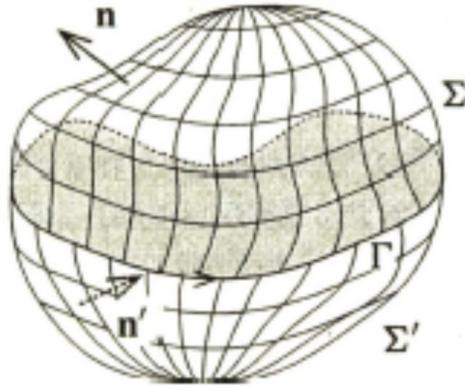
$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

Flusso concatenato, indipendente da  $\Sigma$  purché appoggi sul circuito

Integrale indipendente da  $\Sigma$ :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

Infatti:



$\Sigma + \Sigma' = \text{sup. chiusa}$

Punto per punto, su  $\Sigma'$ :

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}'$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = \oint_{\Sigma + \Sigma'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\rightarrow 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_{\Sigma + \Sigma'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma - \int_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma' = 0$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' d\Sigma'$$

f.e.m. indotta  $\rightarrow$  corrente se c'e' un circuito conduttore

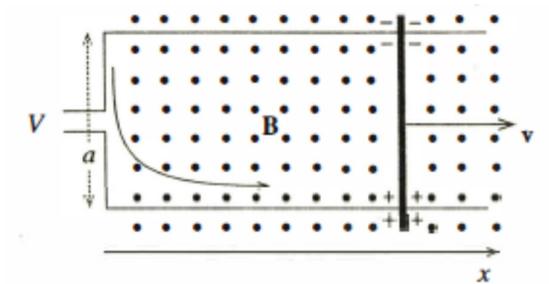
Delocalizzata lungo tutto il circuito

Origine?

Comprensibile nel I caso

'Incomprensibile' nel II caso

I caso: C. magnetico costante, circuito in movimento  
Esempio



Rotaie conduttrici

Sbarra conduttrice, lunga  $a$ , resistenza  $R$ , vel.  $v$

Regola del flusso: flusso variabile  $\leftrightarrow$  circuito cambia dimensione

$$\Phi = Bax$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = Ba \frac{dx}{dt} = Bav = -\mathcal{E} = -fem$$

Corrente:

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} = -\frac{Bav}{R}$$

Segno  $- \rightarrow$  corrente in senso *orario*

$\rightarrow$  c. magnetico *opposto* a quello fisso: legge di Lenz

Interpretazione in termini di forza di Lorentz:

Portatori liberi in sbarretta

$$\rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$\rightarrow$  Spostamento portatori (*senza* accumulo di carica)

$\rightarrow$  Lavoro sul singolo portatore che si muove nella sbarra:

$$W = -Fa = -qvBa$$

$\rightarrow$  Forza elettromotrice indotta:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = -vBa$$

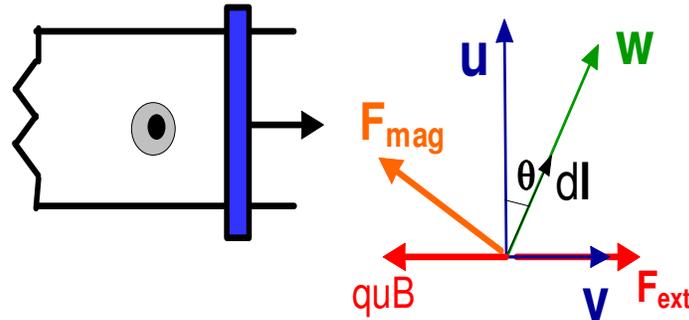
Risultato generalizzabile:

f.e.m. indotta conseguenza della forza di Lorentz

Forza di Lorentz: mantiene in movimento le cariche

Corrente: richiede lavoro, vista la resistenza del conduttore

Chi sta compiendo lavoro sulle cariche, visto che  $\mathbf{F}_m$  non compie lavoro?



Quando circola corrente:

$\mathbf{u}$  vel. di deriva

$\mathbf{v}$  vel. sbarretta

$\mathbf{w}$  vel. totale portatori rispetto a  $\mathbf{B}$

$\mathbf{F}_{ext}$  mantiene in movimento la sbarretta

$\mathbf{F}_m$  forza magnetica  $\perp \mathbf{w}$

Lavoro elementare:

$$dW = F_{ext} dl \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = F_{ext} dl \sin \theta$$

$$F_{ext} = -quB$$

$$\frac{v}{u} = \tan \theta \rightarrow u = \frac{v}{\tan \theta}$$

$dx = dl \cos \theta$ , spostamento elementare lungo la sbarretta

$$\rightarrow dW = -quB \frac{dx}{\cos \theta} \sin \theta = -qBdx \tan \theta \frac{v}{\tan \theta} = -qvBdx$$

$$\rightarrow d\mathcal{E} = -vBdx$$

$\rightarrow$  Forza elettromotrice: alimentata da  $\mathbf{F}_{ext}$

Derivazione legge di Faraday da effetto forza di Lorentz  
su conduttore in moto:

Circuito  $C$  in moto

(eventualmente anche con cambiamento di area)

$\mathbf{v}$  vel. elemento di linea  $d\mathbf{l}$

fem indotta:

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \text{ lavoro campo elettromotore}$$

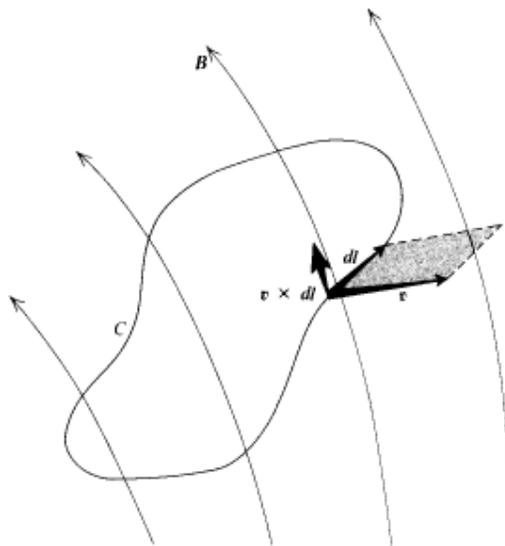
$$\mathcal{E} = - \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}), \text{ proprieta' doppio prodotto misto}$$

$\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$ : area orientata spazzata dall'elemento di linea  $d\mathbf{l}$  in 1 s

$\rightarrow \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$  incremento nell'unita' di tempo

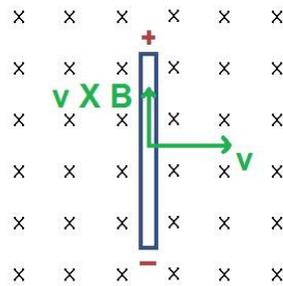
del flusso elementare concatenato a  $C$  causato dal moto di  $d\mathbf{l}$

$$\rightarrow \mathcal{E} = - \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = - \frac{d\Phi}{dt}$$



Esperimento 'ideale':

Sbarra conduttrice in moto in c. magnetico costante



Forza di Lorentz sui portatori liberi:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

→ Accumulo di portatori di segno opposto alle estremita'

→ C. elettrostatico interno uniforme

→ Forza elettrica sui portatori

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

→ Equilibrio:

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_m$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

→ ddp indotta ai capi della sbarra:

$$\Delta\phi = -vBl$$

Es Aereo in volo orizzontale

$$v = 800 \text{ kmh}^{-1} \approx 222 \text{ ms}^{-1}$$

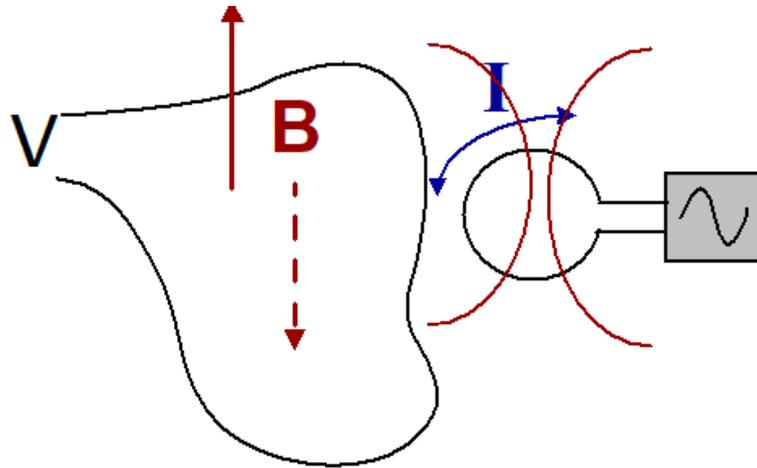
$B = 510^{-5} \text{ T}$  c. magnetico terrestre, componente verticale

$l = 50 \text{ m}$  apertura alare

$$\rightarrow \Delta\phi \approx 0.22 \text{ V}$$

Il caso: C. magnetico variabile, circuito fermo

Esempio



Spira piana, area  $S$ , resistenza  $R$  in

C. magnetico variabile  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \cos \omega t$

Angolo  $\alpha$  fra normale alla spira e  $\mathbf{B}_0$

Nessuna interpretazione in termini di forza di Lorentz

Regola del flusso:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = -\frac{d}{dt} (B_0 S \cos \alpha \cos \omega t)$$

$$\mathcal{E} = B_0 S \cos \alpha \sin \omega t$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0 S \cos \alpha}{R} \sin \omega t$$

Regola del flusso:

f.e.m.  $\leftrightarrow$  corrente  $\leftrightarrow$  Presenza di una forza sui portatori liberi

Portatori fermi:  $v = 0 \rightarrow$  ~~Forza magnetica~~

$\rightarrow$  Forza !?!

Ipotesi: Forza elettrica

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{circuito}} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\text{circuito}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$\rightarrow$   $\mathbf{E}$  c. elettrico non conservativo !!!

$$\oint_{\text{circuito}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma \right) = - \int_{\text{superficie}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

Teo. del rotore:

$$\oint_{\text{circuito}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{superficie}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$$\rightarrow \int_{\text{superficie}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = - \int_{\text{superficie}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Due origini indipendenti per f.e.m. indotta:

{ Forza di Lorentz su conduttori in moto  
{ Campo elettrico originato da c.magnetico variabile

Cause diverse e indipendenti → Stesso effetto

Coincidenza sospetta...(@ A. Einstein, 1905):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ c. elettromotore da f. di Lorentz} \\ \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ c. elettrico non conservativo} \end{array} \right.$$

→ Relativita' ristretta:  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}$

Trasformazioni di Lorentz mescolano componenti di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$   
in riferimenti diversi

C. elettrico nel vuoto:

Definito da contributi alla div e al rot

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

cariche elettriche

c. magnetici variabili

In generale *non* derivabile da un pot. scalare:

solo nel caso di c. elettrostatico

Si osservi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Quindi, in presenza di cariche e c. magnetici variabili:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$\mathbf{E}$  descritto da *due* potenziali

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$\mathbf{B}$  descritto da un solo potenziale (← niente cariche magnetiche)

Esempio: Bobina N spire, sez. quadrata, area S, resistenza R

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \frac{t}{t_0}, \quad 0 < t < t_0$$

$$\rightarrow \Phi(t) = NSB_0 \frac{t}{t_0} \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( NSB_0 \frac{t}{t_0} \right) = -\frac{NSB_0}{t_0}$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{NSB_0}{Rt_0}$$

Carica totale:

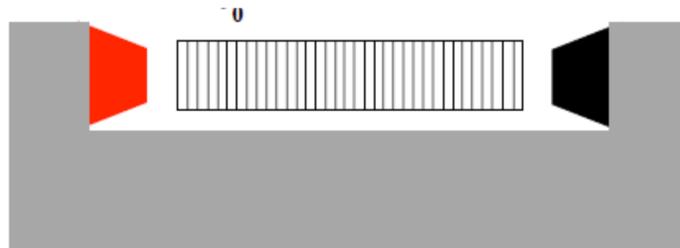
$$Q = \int i(t) dt = \frac{NSB_0}{Rt_0} \int_0^{t_0} dt = \frac{NSB_0}{R}$$

Pot. istantanea dissipata in R :

$$P = i\mathcal{E} = \frac{NSB_0}{Rt_0} \frac{NSB_0}{t_0} = \frac{1}{R} \left( \frac{NSB_0}{t_0} \right)^2$$

Lavoro totale:

$$W = Pt_0 = \frac{(NSB_0)^2}{Rt_0}$$



Conduttore fermo, c. magnetico variabile:  
fem da c. elettrico indotto, non conservativo

Esempio: Spira quadrata rotante in c. magnetico

Lato  $L$ , vel. angolare  $\omega$ , resistenza  $R$

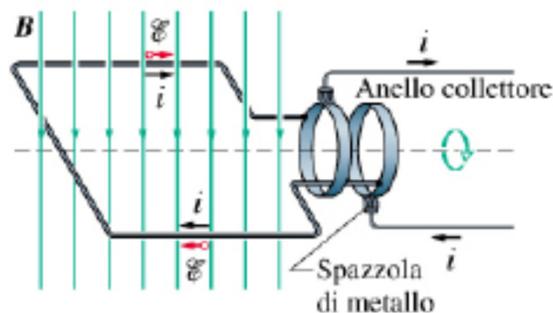
$$\Phi(t) = B_0 L^2 \cos \alpha = B_0 L^2 \cos \omega t$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 L^2 \omega \sin \omega t \rightarrow i(t) = \frac{B_0 L^2 \omega}{R} \sin \omega t$$

$$\varepsilon_{\max} = B_0 L^2 \omega$$

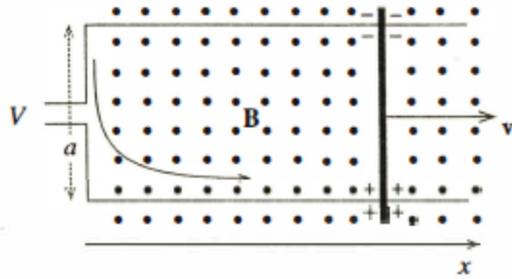
$$P(t) = \varepsilon i = \frac{(B_0 L^2 \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{\varepsilon_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t$$

$$\langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{\max}^2}{2R} \text{ su un periodo}$$



Conduttore in movimento, c. magnetico costante:  
fem da campo elettromotore della forza di Lorentz

## Esempio: Prototipo di generatore



Regola del flusso: flusso variabile  $\leftrightarrow$  circuito cambia dimensione

$$\Phi = Bax$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba \frac{dx}{dt} = -Bav$$

Corrente:

$$i = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{R} = -\frac{Bav}{R}$$

Segno  $- \rightarrow$  corrente in senso *orario*

$\rightarrow$  c. magnetico *opposto* a quello fisso: legge di Lenz

Forza magnetica:

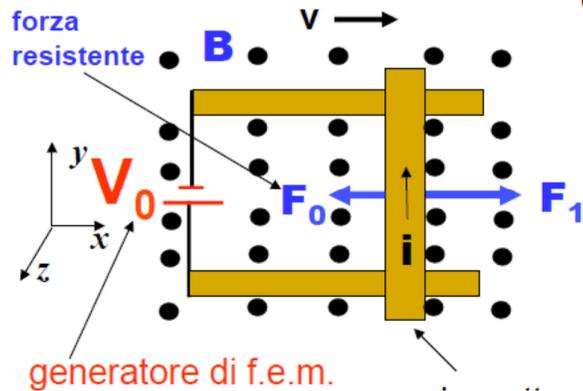
$$d\mathbf{F}_m = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \rightarrow F_m = -iaB = -\frac{B^2 a^2 v}{R}, \text{ frenante}$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_m \rightarrow F_{ext} = \frac{B^2 a^2 v}{R}, \text{ per mantenere } v \text{ costante}$$

$$\rightarrow P_{mecc} = F_{ext} v = \frac{B^2 a^2 v^2}{R}$$

$$\rightarrow P_{Joule} = \varepsilon i = \frac{B^2 a^2 v^2}{R} = P_{mecc}, \text{ dissipata in } R$$

## Esempio: Prototipo di motore elettrico



sbarretta mobile percorsa dalla corrente  $i$  lunga  $l$

$$x = vt$$

$$\Phi = Blx = Blvt$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

$$\rightarrow i = \frac{V_0 + \varepsilon}{R} = \frac{V_0 - Blv}{R}$$

$$m \frac{dv}{dt} = F_1 - F_0 = iBl - F_0$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{iBl - F_0}{m} = \frac{(V_0 - Blv)Bl}{mR} - \frac{F_0}{m} = \underbrace{\frac{V_0Bl}{mR}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{\beta} - \frac{B^2l^2}{mR}v$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int_0^t dt \rightarrow -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta v) \Big|_{v_0}^v = t$$

$$\ln \frac{\alpha - \beta v}{\alpha - \beta v_0} = -\beta t \rightarrow \alpha - \beta v = (\alpha - \beta v_0) e^{-\beta t}$$

$$\rightarrow v = \frac{\alpha}{\beta} - \left( \frac{\alpha}{\beta} - v_0 \right) e^{-\beta t}, \quad \tau = \frac{1}{\beta} \text{ cost. di tempo}$$

$$\rightarrow v = \left( \frac{V_0Bl}{mR} - \frac{F_0}{m} \right) \frac{mR}{B^2l^2} - \left( \left( \frac{V_0Bl}{mR} - \frac{F_0}{m} \right) \frac{mR}{B^2l^2} - v_0 \right) e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

$$\rightarrow v = \underbrace{\left( \frac{V_0}{Bl} - \frac{F_0R}{B^2l^2} \right)}_{v_\infty} - \left[ \underbrace{\left( \frac{V_0}{Bl} - \frac{F_0R}{B^2l^2} \right)}_{v_\infty} - v_0 \right] e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

$$\rightarrow v = v_\infty - (v_\infty - v_0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

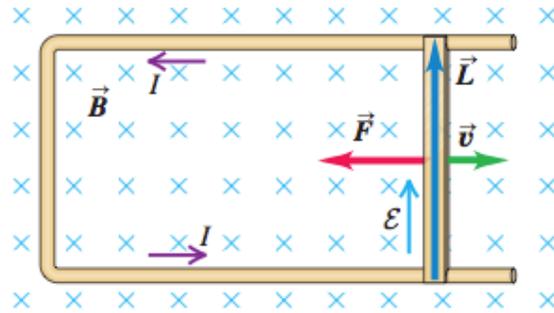
Se  $v_0 = 0$ :

$$\rightarrow \varepsilon_\infty = -Blv_\infty = -V_0 + \frac{RF_0}{Bl}$$

$$\rightarrow i_\infty = \frac{V_0 - v_\infty Bl}{R} = \frac{F_0}{Bl}$$

$$\rightarrow P_\infty = V_0 i_\infty = \underbrace{Ri_\infty^2}_{\text{Joule}} + \underbrace{F_0 v_\infty}_{\text{Mecc}}, \text{ pot. spesa dal generatore = cost. a tempi lunghi}$$

## Esempio: Prototipo di freno a induzione



$$F = -iLB$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = iR$$

$$\rightarrow i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = BLv = BL \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow i = -\frac{1}{R} BLv$$

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{R} BLBLv = \frac{B^2 L^2}{R} v$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{B^2 L^2}{mR} v = 0$$

$$\rightarrow v = v_0 e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}$$