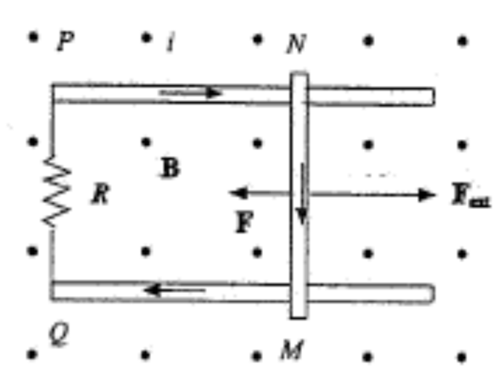
Considerazioni energetiche sulla legge di Faraday

Esempio 1



$$\mathcal{E} = -vBb$$

$\rightarrow i = \dfrac{-vBb}{r+R}, \quad r$ res. sbarretta

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{E}_i = 0$ sbarretta (equilibrio)

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el}$ resto del circuito

$$\oint_{circuito} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{circuito} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_M^N \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = vBb$$

$$\mathbf{F}_m = i\mathbf{l} \times \mathbf{B} \rightarrow F_m = \frac{-vBb}{r+R} bB = -\frac{vB^2b^2}{r+R}$$

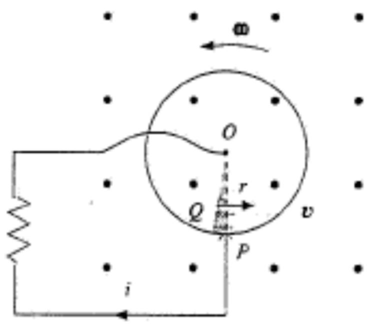
$\rightarrow$ Per mantenere la sbarretta in moto con vel. $\mathbf{v}$:

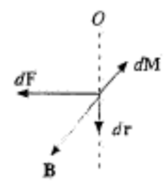
$$\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_m \rightarrow F_{ext} = \frac{vB^2b^2}{r+R}$$

$$P_{ext} = \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{v} = \frac{v^2B^2b^2}{r+R} = \left(r+R\right)i^2 = \mathcal{E} i$$

$\rightarrow$ Pot. meccanica trasformata in pot. elettrica nel carico

Esempio 2





$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r B \hat{\mathbf{u}}_r$

$\mathcal{E} = \int_O^P \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_O^P \omega r B dr = \frac{1}{2}\omega B a^2$

$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$

$d\mathbf{F}_m = i d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ f. sull'elemento di corrente radiale

Mom. meccanico elementare della forza magnetica:

$d\mathbf{M}_m = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m = -\frac{\omega B^2 a^2}{2R} r dr \hat{\mathbf{u}}_r$

$\rightarrow \mathbf{M}_m = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m = -\int_0^a \frac{\omega B^2 a^2}{2R} r dr \hat{\mathbf{u}}_r = -\frac{\omega B^2 a^4}{4R} \hat{\mathbf{u}}_r,$ mom. frenante

Per mantenere il disco in rotazione:

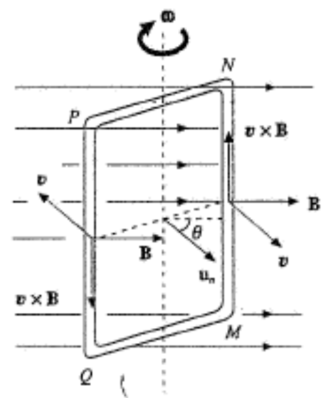
Mom. meccanico esterno

$\mathbf{M}_{ext} = -\mathbf{M}_m$

Pot. meccanica esterna:

$P_{ext} = \mathbf{M}_{ext} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{M}_m \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R} = \mathcal{E} i$

Esempio 3



Usando la forza di Lorentz:

Lati spira $MN = s, NP = s'$

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = vB\sin\theta s + 0 + vB\sin\theta s + 0 = 2vB\sin\theta s$$

$$v = \frac{\omega s'}{2}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = 2B\sin\theta s\frac{\omega s'}{2} = \omega BA\sin\theta$$

$$\theta = \omega t$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = \omega BA\sin\omega t$$

Usando la legge di Faraday:

$$\Phi(B) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BA\sin\omega t$$

Fem sinusoidale

$\rightarrow i = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{\omega BA\sin\omega t}{R}$, R resistenza

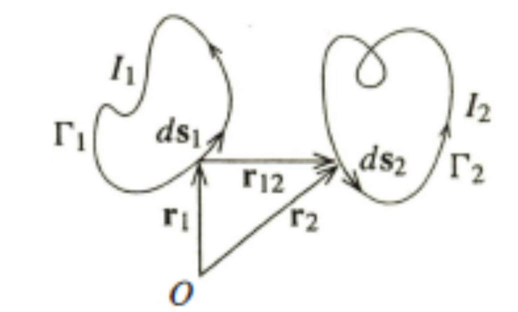
$\rightarrow P_{el} = Ri^2 = \dfrac{\omega^2 B^2 A^2 \sin^2\omega t}{R}$ dissipata nel carico

Come al solito:

$$P_{mecc} = M_{mecc}\omega = -M_{mag}\omega = iAB\sin\theta\omega = \frac{\omega^2 B^2 A^2 \sin^2\omega t}{R}$$

necessaria per mantenere in rotazione la spira

Mutua induzione:



Situazione simmetrica:

$\Phi_{12} =$ flusso di $\mathbf{B_1}$ concatenato a Γ_2

$\rightarrow \Phi_{12}$ variabile causa fem in Γ_2

$\Phi_{21} =$ flusso di $\mathbf{B}_2$ concatenato a Γ_1

$\rightarrow \Phi_{21}$ variabile causa fem in Γ_1

$$\Phi_{12} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla\times\mathbf{A}_1$$

$$\rightarrow \Phi_{12} = \int_{\Sigma_2} \left(\nabla\times\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2)\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2)\cdot d\mathbf{s}_2$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma_1}\frac{I_1 d\mathbf{s}_1}{r_{12}}, \quad \text{se spessore circuiti} \ll r_{12}$$

$$\rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma_2}\oint_{\Gamma_1}\frac{I_1 d\mathbf{s}_1\cdot d\mathbf{s}_2}{r_{12}} = I_1 M_{12}$$

$$M_{12} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma_2}\oint_{\Gamma_1}\frac{d\mathbf{s}_1\cdot d\mathbf{s}_2}{r_{12}}$$

Per simmetria:

$\Phi_{21} = I_2 M_{21}$

$M_{21} = M_{12} = M$, coefficiente di mutua induzione

Unita': Henry   Segno: arbitrario,dipende dai versi positivi delle 2 spire

Correnti variabili $\rightarrow$ Fenomeno mutua induzione

$I_1(t)$ variabile $\rightarrow \varepsilon_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt}$

Simmetricamente: $\varepsilon_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt}$

Autoinduzione:

I nel circuito Γ $\rightarrow$ c.magnetico che concatena il flusso Φ a Γ

$\Phi \propto I \rightarrow \Phi = LI$

L coefficiente di autoinduzione, o induttanza di Γ

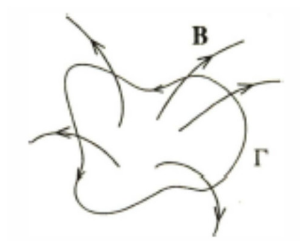
Unita' di misura: Henry

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

$\rightarrow L$ dipendente da geometria del circuito,

non calcolabile come M (approx. non valida):

solo da $\Phi = LI$



Esempio: Solenoide lungo

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$\rightarrow \Phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI$$

$$\rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

Esempio: Solenoide toroidale

Sez. rettangolare, raggi R_1, R_2

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I$$

$$\rightarrow d\Phi = B\left(R_2 - R_1\right) dr = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I \left(R_2 - R_1\right) dr$$

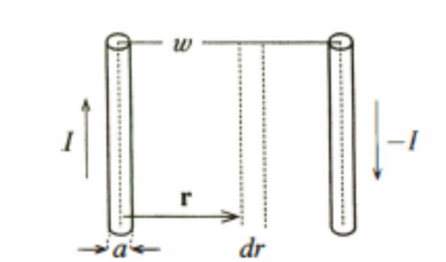
$$\rightarrow d\Phi = \mu_0 \frac{N}{2\pi} \left(R_2 - R_1\right) \frac{dr}{r} I$$

$$\rightarrow \Phi = \mu_0 \frac{N}{2\pi} \left(R_2 - R_1\right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} I = \mu_0 \frac{N}{2\pi} \left(R_2 - R_1\right) \ln \frac{R_2}{R_1} I$$

$$\rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2}{2\pi} \left(R_2 - R_1\right) \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Esempio: linea bifilare

Fili paralleli indefiniti $\rightarrow L$ per unita' di lunghezza



$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, c. magnetico di ognuno dei 2 fili

$\rightarrow d\Phi = Bldr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr$

$\rightarrow d\Phi' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r}$, flusso elementare/lunghezza

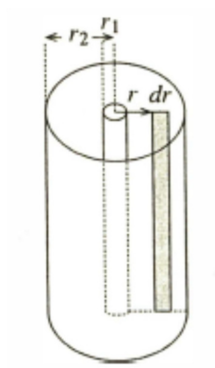
$\rightarrow \Phi' = \int_{a/2}^{w-a/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{w - a/2}{a/2}$

Induttanza/lunghezza: fattore 2 (2 fili)

$\rightarrow L' = 2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{w - a/2}{a/2} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{w - a/2}{a/2}$

Esempio: cavo coassiale

Cilindri coassiali indefiniti $\rightarrow L$ per unita' di lunghezza



$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, c. magnetico fra filo e schermo ext.

$\rightarrow d\Phi = Bldr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr$

$\rightarrow d\Phi' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r}$, flusso elementare/lunghezza

$\rightarrow \Phi' = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

Induttanza/lunghezza:

$\rightarrow L' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$