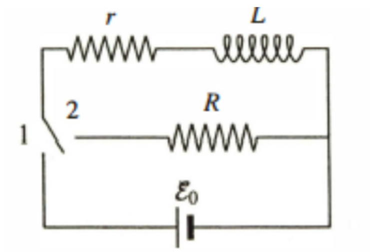
Circuito di induttanza L con I variabile:

Compare fem autoindotta

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$



'Carica' dell'induttanza:

$$E_0 - L\frac{di}{dt} = ri$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i = \frac{E_0}{L}$$

$$\rightarrow i(t) = Ae^{-\frac{r}{L}t} + \frac{E_0}{r}$$

$$i(0) = 0 \rightarrow A = -\frac{E_0}{r}$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{E_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

'Scarica' dell'induttanza attraverso R:

$$-L\frac{di}{dt} = (r+R)i$$

$$i(0) = \frac{E_0}{r}$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{E_0}{r}e^{-\frac{r+R}{L}t}$$

Effetto della 'carica' di un'induttanza:

Lavoro del generatore di fem $\rightarrow$ Energia

$$\underbrace{E_0 - L\frac{di}{dt}}_{fem\ totale} = ri$$

$-L\frac{di}{dt}$ 'forza contro-elettromotrice' = fcem

Potenza:

$$P_{fcem} = \varepsilon i = -L\frac{di}{dt}i$$

$\rightarrow$ Potenza generatore per compensarla:

$$P_{comp} = -P_{fcem} = L\frac{di}{dt}i$$

$\rightarrow$ Lavoro totale:

$$W_{comp} = \int_0^\infty P_{comp}dt = \int_0^\infty L\frac{di}{dt}idt = \int_0^{i_\infty} Lidi$$

$$\rightarrow W_{comp} = \frac{1}{2}Li_\infty^2$$

W_{comp} reversibile: Trasformato in en. magnetica,

immagazzinata nel c. magnetico di L

Pot. dissipata in r:

$$P_{Joule} = ri^2$$

$$i(t) = \frac{E_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

$$\rightarrow P_{Joule} = \frac{E_0^2}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)^2 \rightarrow P_\infty = \frac{E_0^2}{r}$$

Potenza del generatore trasformata in calore:

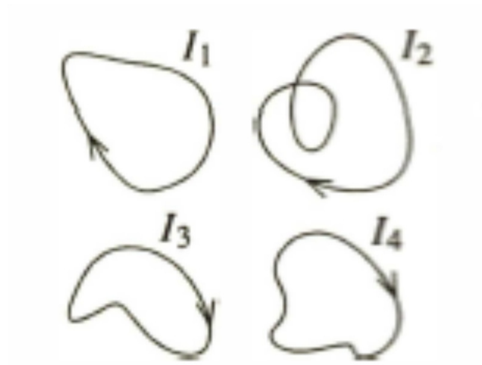
$P_{irr} = P_{Joule}$, irreversibile

Potenza totale erogata:

$$P_{tot} = P_{comp} + P_{irr} = L\frac{di}{dt}i + \frac{E_0^2}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)^2 = \frac{E_0^2}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{E_0^2}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)^2$$

$$\rightarrow P_{tot} = \frac{E_0^2}{r}\left(e^{-\frac{r}{L}t} - e^{-\frac{2r}{L}t} + 1 - 2e^{-\frac{r}{L}t} + e^{-\frac{2r}{L}t}\right) = \frac{E_0^2}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

Energia di un sistema di correnti (es spire):



Correnti $I_1, ..., I_n$, induttanze $L_1, ..., L_n$:
Energia = Lavoro speso per assemblare sistema
Situazione simile, ma non identica, all'assemblaggio di un insieme di cariche elettriche
Prima L:

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Seconda L:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Quando si energizza L_2 bisogna mantenere costante I_1 in presenza di mutua induzione:

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

$\rightarrow dw_1 = -\varepsilon_{21} I_1 dt$, lavoro speso in dt dal gen. 1 per compensare ε_{21}

$$\rightarrow dw_1 = +I_1 M_{21} \frac{dI_2}{dt} dt$$

$$\rightarrow w_1 = \int dw_1 = \int_0^{I_2} M_{21} I_1 dI_2 = M_{21} I_1 I_2$$

$\rightarrow$ En. totale dei 2:

$$U_{21} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

$\rightarrow$ Per n correnti:

$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} M_{hk} I_h I_k$$

En.di interazione fra una spira 1 e una bobina 2:

$$U_{\text{int}} = M I_1 I_2$$

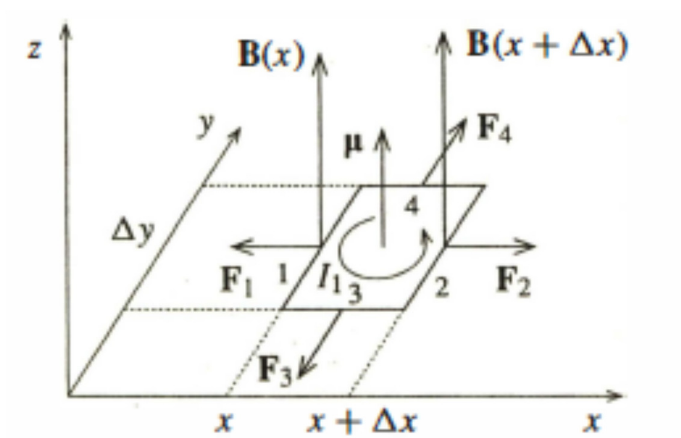
Φ_{21} flusso generato da 2 e concatenato a 1

Φ_{12} simmetrico

$\rightarrow U_{\text{int}} = \Phi_{21} I_1 = \Phi_{12} I_2$

Espressione energia in termini del mom. magnetico della spira:

Lavoro speso per portare la spira da ∞ alla pos. finale x_F



$\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4 \ \perp spost \rightarrow W = 0$

Lavoro elementare forza esterna:

$$dW = -dW_m = -\mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{s} = -\left(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1\right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\rightarrow dW = -\left(F_2 - F_1\right) dx = -\left[i_1 \Delta y B\left(x + dx\right) - i_1 \Delta y B\left(x\right)\right] dx$$

$$\rightarrow dW = -i_1 \Delta y\left[B\left(x + dx\right) - B\left(x\right)\right] dx \approx -i_1 \Delta y \frac{dB}{dx} \Delta x dx$$

$$\rightarrow dW = -\mu \frac{dB}{dx} dx$$

$$\rightarrow W = -\mu \int_0^B dB = -\mu B$$

In generale $U_{mecc} = W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$

U_{mecc} *non* e' l'en. totale del sistema:

manca il lavoro (elettrico) necessario a mantenere costante $\boldsymbol{\mu}$

Se lo si tiene in conto:

$U = U_{mecc} + U_{elett} \equiv 0$

conseguenza del fatto che $\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v} \rightarrow W_m = 0$

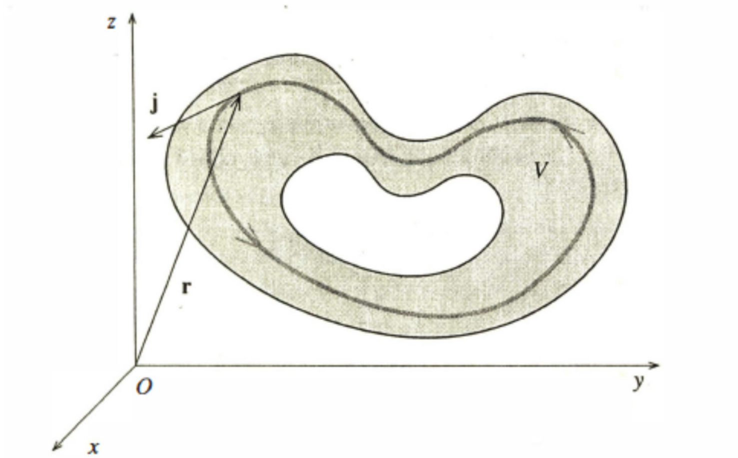
Nel bilancio energetico va poi considerato il lavoro (elettrico) necessario a mantenere costante il campo $\mathbf{B}$: se lo si tiene in conto

$U = U_{mecc} + U_{elett} + U_{\mathbf{B}} \equiv +\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$!!

(cfr. nota aggiuntiva scaricabile)

Distribuzione generica di corrente:

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$



'Accensione' corrente:

Aumento progressivo da corrente zero

$\rightarrow$ Lavoro necessario a stabilire la corrente include quello dei generatori che devono compensare le forze contro-elettromotrici originate dai c. magnetici variabili

Situazione stazionaria:

$\nabla \cdot \mathbf{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \rightarrow$ linee chiuse

$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} =$ potenza/volume esercitata da $\mathbf{E}$ sulle correnti

$\rightarrow \delta W = -\int_{vol} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV \delta t,$ lavoro fatto in δt dai generatori per mantenere i cost

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$ corr. stazionarie

$\rightarrow \delta W = -\dfrac{\delta t}{\mu_0} \int_{vol} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} dV$

$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B},$ ident. vettoriale

$\rightarrow \delta W = +\dfrac{\delta t}{\mu_0} \int_{vol} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV - \dfrac{\delta t}{\mu_0} \int_{vol} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} dV$

Per correnti limitate a un volume finito:

$$\int_{vol} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dV = 0$$

Infatti:

$$\int_{vol} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dV = \int_{\substack{tutto\\ lo\ spazio}} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dV$$

$$\int_{\substack{tutto\\ lo\ spazio}} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dV = \lim_{R\to\infty}\int_{V_R} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dV$$

$= \lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\Sigma,$ teo. della divergenza

Correnti in vol. limitato:

$$\to \mathbf{E},\mathbf{B} \propto \frac{1}{R^2} \to \mathbf{E}\times\mathbf{B} \propto \frac{1}{R^4},\ d\Sigma \propto R^2$$

$$\to (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\Sigma \propto \frac{1}{R^2} \to \lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\Sigma = 0$$

$$\to \delta W = -\frac{\delta t}{\mu_0}\int_{vol}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}\,dV = +\frac{\delta t}{\mu_0}\int_{vol}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{B}\,dV$$

$$\to \delta W = +\frac{1}{\mu_0}\int_{vol}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\delta t\cdot\mathbf{B}\,dV = +\frac{1}{\mu_0}\int_{vol}\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{B}\,dV$$

$$\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{B} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\delta B^2$$

$$\to \delta W = +\frac{1}{2\mu_0}\int_{vol}\delta B^2\,dV = dU_m$$

Passando al lavoro totale quando il c.magnetico varia da 0 a $\mathbf{B}$

$$\to W = U_m = +\frac{1}{2\mu_0}\int_{vol}B^2\,dV$$

Densita' volumetrica di en. magnetica:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Es. solenoide ideale:

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 l \pi r^2 i^2$$

oppure

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 l$$

$$B = \mu_0 n i$$

$$\rightarrow U_m = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} \pi r^2 l$$