Argomento teorico per la corrente di spostamento:

$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}$ legge di Ampere

$\rightarrow\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\mu_0\nabla\cdot\mathbf{j}=0$

D'altra parte:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$\rightarrow$ Legge di Ampere + Eq. di continuita':

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$\rightarrow$ Legge di Ampere vale in condizioni stazionarie

($\leftarrow$ Senza accumulo di cariche)

Modifica di Maxwell della legge di Ampere:

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\mu_0\left(\nabla\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

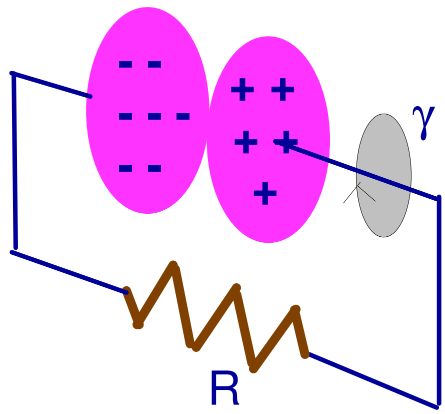
$$\rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)=\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\mu_0\left(\nabla\cdot\mathbf{j}+\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\rightarrow\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\nabla\cdot\left(\mu_0\mathbf{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\rightarrow\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Es: Condensatore che si scarica

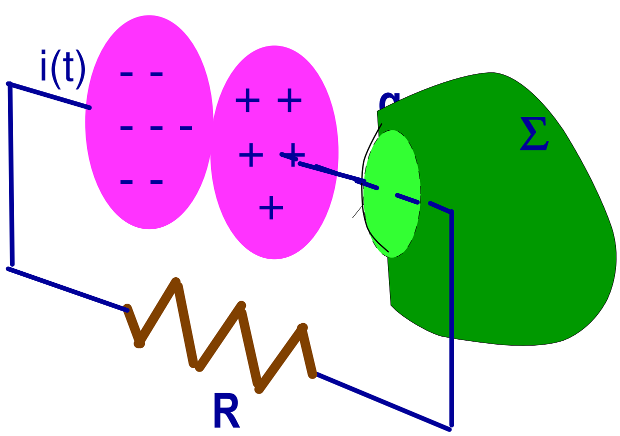


$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

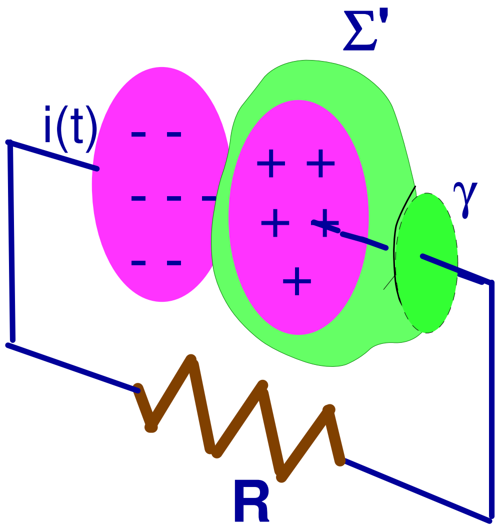
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Prima possibilita': Σ



$$\mu_0 \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \mu_0 i \neq 0$$ OK

Seconda possibilita': Σ'



$\mu_0 \oiint_{\Sigma'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$ KO

$\rightarrow$ Inconsistenza fra legge di Ampere e conservazione della carica

Maxwell: Conservazione della carica sempre valida
$\rightarrow$ Modifica legge di Ampere

$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, aggiunta *corrente di spostamento*

$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i(t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_\Sigma(\mathbf{E})}{dt}$ forma integrale

Eq. di Maxwell nel vuoto:

Forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Forma integrale

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\mathbf{B})}{dt}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\Sigma}(\mathbf{B})}{dt}$$

Fortemente simmetriche in assenza di cariche e correnti:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$\mu_0,\ \varepsilon_0$ ottenuti da misure statiche:

Leggi di Coulomb, Biot-Savart

Ma:

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad !!!$$

Conservazione della carica da eq. di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

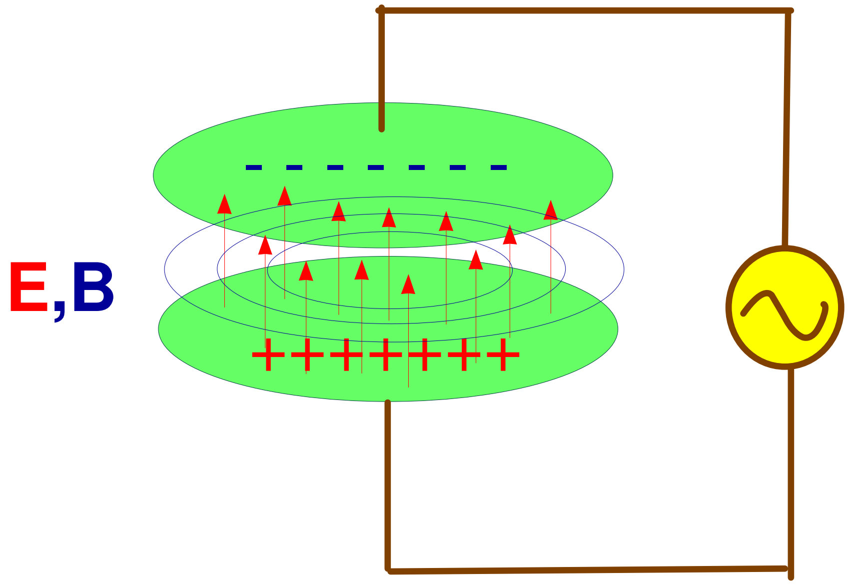
$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{eq. di continuita'}$$

Capacita' con ddp alternata ai capi:



$$V_C = V_0 \sin \omega t$$

$$\rightarrow i_{cond} = \frac{dQ}{dt} = \frac{CdV_C}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma'} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \omega C V_0 \cos \omega t \quad \Gamma' \text{ cerchio attorno al filo}$$

$$E = \frac{V_C}{d} = \frac{V_0}{d} \sin \omega t \rightarrow \Phi_S(\boldsymbol{E}) = \frac{V_0}{d} \sin \omega t \pi r^2$$

$$\rightarrow i_{spost} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\boldsymbol{E})}{dt} = \omega \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos \omega t \pi r^2$$

$$\rightarrow \oint_{\Gamma''} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \pi r^2 \omega \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos \omega t \quad \Gamma'' \text{ cerchio concentrico alle piastre}$$

Γ' cerchio attorno al filo, raggio r: $\boldsymbol{B}$ tangenziale

$$B 2\pi r = \mu_0 \omega C V_0 \cos \omega t \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \omega C V_0 \cos \omega t$$

Γ'' cerchio concentrico alle piastre, raggio r: $\boldsymbol{B}$ tangenziale

$$\rightarrow i_{spost} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{S''}(\boldsymbol{E})}{dt} = \varepsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t \rightarrow B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r}{2} \omega \frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

Necessario modificare anche la legge di Biot-Savart?
Occorre considerare il contributo a $\mathbf{B}$ della corrente di spostamento?

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{j}_d = \nabla \times \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{legge di Faraday}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{j}_d = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Se $\mathbf{B}$ non varia 'troppo rapidamente':

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \approx 0, \quad \text{approssimazione quasi-statica}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{j}_d \approx 0$$

$\rightarrow \mathbf{j}_d \approx$ irrotazionale

$\rightarrow$ Linee di corrente: Sempre riconducibili a sovrapposizione di flussi radiali da/verso sorgenti puntiformi
(Cfr. campo elettrostatico da contributi coulombiani)
$\rightarrow$ Campo totale di flusso radiale di corrente $= 0$
Matematicamente:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}_d \, dV}{r}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}_d \, dV}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla \times \mathbf{j}_d \, dV}{r} \approx 0$$

$\rightarrow$ In appr. quasi-statica, il contributo di $\mathbf{j}_d$ al c. magnetico e' trascurabile

Capacita' con ddp alternata:

C. magnetico $\approx$ Dovuto a contributi alla Biot-Savart da correnti di conduzione

Manca il contributo $\sim$ trascurabile del segmento di circuito corrispondente alla capacita'

Quando si puo' prendere l'appr. quasi-statica?

Tensione/Corrente sinusoidale

ω pulsazione, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ periodo, R dimensione del sistema:

$\rightarrow R \ll cT$

Capacita' con ddp alternata:

Nel filo c'e' anche una corrente di spostamento:

$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

$$\rightarrow E = \frac{j_{cond}}{\sigma} \quad \rightarrow \Phi(E) = \frac{j_{cond} A}{\sigma} = \frac{i_{cond}}{\sigma}$$

$$\rightarrow i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \frac{di_{cond}}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\left(-C\omega^2 V_0 \sin \omega t\right)$$

$$\rightarrow \frac{i_d}{i_{cond}} \leq \frac{\frac{\varepsilon_0}{\sigma} C\omega^2 V_0}{C\omega V_0} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \sim \frac{8.87 10^{-12}}{6 10^{7}} \omega \sim 1.2 10^{-19} \omega$$

Effetto trascurabile a tutte le frequenze