

Materiali magnetici: qualche analogia con i dielettrici

Mom. di dipolo magnetico atomici/molecolari

Effetto di campi applicati: magnetizzazione del mezzo

↔ Riarrangiamento di correnti microscopiche (elettroni legati)

Classificazione:

M. diamagnetici (tutti)

M. paramagnetici (molecole/atomi dotati di mom. di dipolo proprio)

M.ferromagnetici (+ varianti):magnetizzazione spontanea

$\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle n$  vettore magnetizzazione

$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$  momento di dipolo magnetico medio di ogni molecola

$n$  molecole/volume

Dimensioni:

$$[M] = [I][L^2][L^{-3}] = [I][L^{-1}]$$

Unita':  $Am^{-1}$

Modello molecolare semplificato: mezzo lineare

$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = c\mathbf{B}$ ,  $c$  'polarizzabilita' magnetica'

$\mathbf{B}$  = campo totale agente su ogni molecola

Effetto su  $\mathbf{B}$  di materiali diamagnetici o paramagnetici:

Sempre molto piccoli, di solito trascurabili

→  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{vuoto}$

Possibile eccezione: materiale paramagnetico a bassa  $T$ , alto  $\mathbf{B}$

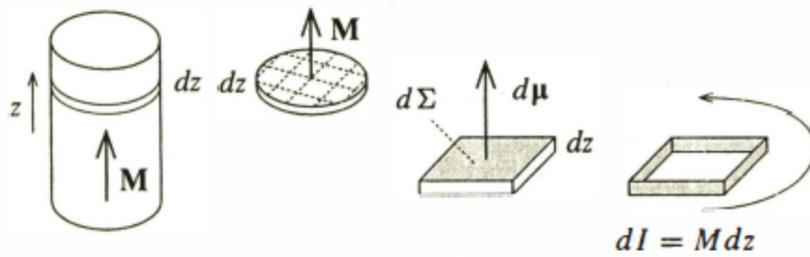
→ Magnetizzazione elevata

→  $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}_{ferromagnetico}$

Effetto di materiali ferromagnetici:

Molto grande

## Magnetizzazione uniforme



Suddivisione in:

'fette' verticali, spessore  $dz$

'pad' orizzontali, area  $d\Sigma$

Mom. magnetico del pad:

$$d\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}d\Sigma dz$$

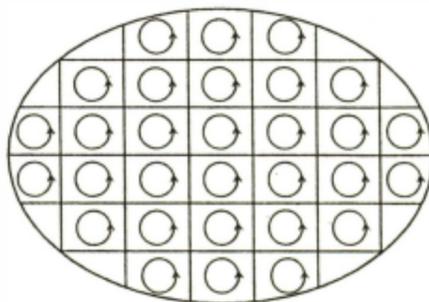
campo generato da  $d\boldsymbol{\mu}$  = campo di una spiretta di corrente

→ 'fettuccia' di corrente equivalente:

$$dId\Sigma = d\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}d\Sigma dz$$

$$\rightarrow dI = Mdz$$

$\mathbf{M}$  uniforme → Compensazione dei percorsi interni delle correnti equivalenti:

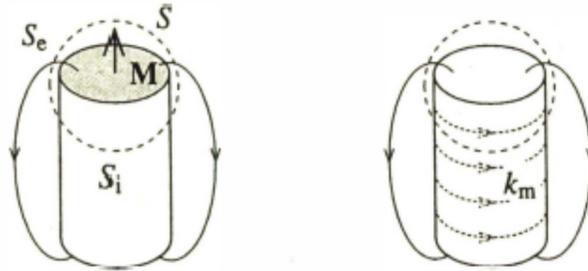


→ 'Fetta': equivalente a nastro di corrente sulla sua sup. laterale

→  $dI = Mdz \rightarrow \delta I = M \delta z$ ,  $\delta z$  altezza cilindro

→ Campo esterno uguale per cilindro e corrente superficiale

Campo interno:



Sup.chiusa  $S$  composta da  $S_e$  (esterna) e  $S_i$  (interna):

flusso attraverso  $S$  per cilindro e corrente superficiale

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = 0 = \Phi_{S_e}(\mathbf{B}) + \Phi_{S_i}(\mathbf{B}) \quad \text{cilindro}$$

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = 0 = \Phi_{S_e}(\mathbf{B}) + \Phi_{S_i}(\mathbf{B}) \quad \text{corr. superficiale}$$

$$\Phi_{S_e}^{cil}(\mathbf{B}) = \Phi_{S_e}^{corrsup}(\mathbf{B})$$

$$\rightarrow \Phi_{S_i}^{cil}(\mathbf{B}) = \Phi_{S_i}^{corrsup}(\mathbf{B})$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_{int}^{cil} = \mathbf{B}_{int}^{corrsup}$$

Quindi:

$$\mathbf{B}_{cil. magn.} = \mathbf{B}_{solenoid}$$

In forma vettoriale:

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}} \text{ versore localmente } \perp \text{ alla superficie}$$

Magnetizzazione non uniforme:

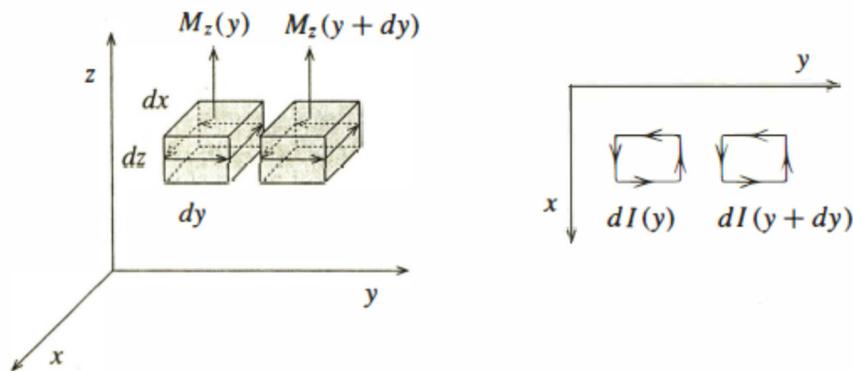
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, y, z)$$

Suddivisione in volumetti elementari  $dV = dx dy dz$ :

componente  $z$  di  $\mathbf{M}$  in 2 volumetti contigui lungo  $y$

$$M_z(y), M_z(y + dy)$$

$$\rightarrow dI(y) = M_z(y) dz, dI(y + dy) = M_z(y + dy) dz$$



Corrente netta su faccia comune lungo  $x$ :

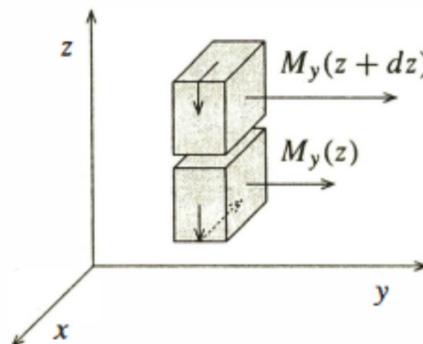
$$d^2 I = M_z(y + dy) dz - M_z(y) dz \approx \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

$$\rightarrow \frac{d^2 I}{dy dz} = \frac{\partial M_z}{\partial y} = j_x \text{ densita' di corrente}$$

Componente  $y$  di  $\mathbf{M}$  in 2 volumetti contigui lungo  $z$

$$M_y(z), M_y(z + dz)$$

$$\rightarrow dI(z) = M_y(z) dy, dI(z + dz) = M_y(z + dz) dy$$



Corrente netta su faccia comune lungo  $x$ :

$$d^2 I = -M_y(z+dz)dy + M_y(z)dy \approx -\frac{\partial M_y}{\partial z} dydz$$

$$\rightarrow \frac{d^2 I}{dydz} = -\frac{\partial M_y}{\partial z} = j_x \quad \text{densita' di corrente}$$

$$\rightarrow j_{mx} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad \text{dens. di corrente totale (comp. } x)$$

Estensione alle altre 2 componenti:

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

Definizione che include anche quella relativa a  $\mathbf{M}$  uniforme:

$\nabla \times \mathbf{M} = 0$  nel volume  $\rightarrow$  densita' di corrente di magnetizzazione nulla

$\nabla \times \mathbf{M} \neq 0$  alla superficie  $\rightarrow$  densita' di corrente di magnetizzazione non nulla

$\rightarrow$  In generale:

Magnetizzazione  $\mathbf{M}$  = Mom. di dipolo magnetico/volume

Equivalente a quello generato da una densita' di corrente

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases}, \text{ dens. di corrente totale}$$

$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m$ , conduzione + magnetizzazione

$$\rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{j}_c + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\rightarrow \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_c$$

Definizione: Campo magnetizzante

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

→ Eq. della magnetostatica nei mezzi materiali:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{j}_c \end{cases}$$

$\mathbf{H}$  legato alle sole correnti di conduzione, o libere (cfr.  $\mathbf{D}$  nei dielettrici)

Utile per risolvere problemi e per scrivere le eq. di Maxwell

nei materiali in modo simile a quelle nel vuoto

Stato magnetico di un materiale definito da 2 soli vettori:

$\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  oppure  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$

$\mathbf{B}$ : legato a tutte le correnti, libere e di magnetizzazione

$\mathbf{M}$ : legato alle sole correnti di magnetizzazione

$\mathbf{H}$ : legato alle sole correnti libere

Forma integrale:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_c$$

Materiale lineare, isotropo:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} = \frac{\chi_m}{(1 + \chi_m) \mu_0} \mathbf{B}$$

'Polarizzabilita' magnetica, o magnetizzabilita':

$$\mathbf{M} = nc\mathbf{B} \rightarrow c = \frac{\chi_m}{n(1 + \chi_m) \mu_0}$$

Sperimentalmente:  $\chi_m \ll 1$

$$\rightarrow c = \frac{\chi_m}{n(1 + \chi_m) \mu_0} \simeq \frac{\chi_m}{n\mu_0}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} = \frac{\chi_m}{(1 + \chi_m) \mu_0} \mathbf{B} \simeq \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{M} = nc\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M} (1 - nc\mu_0) = nc\mu_0 \mathbf{H}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} = \frac{nc\mu_0}{(1 - nc\mu_0)} \mathbf{H}$$

Controllo:

$$nc\mu_0 = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\frac{\chi_m}{1 + \chi_m}}{1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m}} \mathbf{H} = \chi_m \mathbf{H}$$

$c, \chi_m, \mu$ : quasi sempre scalari  $\rightarrow \mathbf{M} \parallel \mathbf{B}$

Strutture cristalline a bassa simmetria: tensori  $\rightarrow \mathbf{M} \nparallel \mathbf{B}$

Permeabilita' magnetica relativa:

$$\mu_r = 1 + \chi_m \rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

Osservazione interessante: in assenza di correnti di conduzione:

$$\mathbf{j}_c = 0 \rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \mathbf{H} \text{ irrotazionale}$$

$$\rightarrow \mathbf{H} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) \text{ potenziale magnetostatico}$$

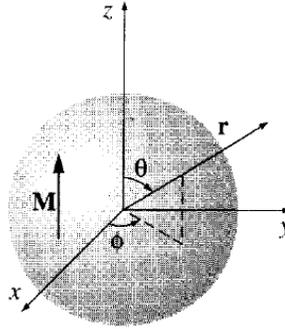
Problemi di magnetostatica:

In assenza di correnti vere, possibile calcolare  $\mathbf{H}$  da un potenziale scalare, come se originato da cariche magnetiche (come  $\mathbf{E}$  in elettrostatica)

Ma: con vincolo assoluto di restare sempre legate a coppie di segno opposto nei dipoli magnetici

Questo è impossibile per  $\mathbf{B}$ :  
origine di  $\mathbf{B}$  rimane solo nelle correnti

Es: Sfera uniformemente magnetizzata



a) Campo interno:

$B$  determinato dalla densita' di corrente di magnetizzazione sulla superficie della sfera;

$H$  equivalentemente determinato da una distribuzione superficiale di poli magnetici (fittizi), analoghi a cariche superficiali in un dielettrico polarizzato:

$$\sigma_m = -\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -M \cos \theta, \quad \hat{\mathbf{n}} \text{ versore normale alla superficie}$$

Contributo elementare al campo al centro della sfera:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_m dA}{R^2} \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{M \cos \theta R^2 d\Omega}{R^2} \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi} M \cos \theta d\Omega \hat{\mathbf{n}}$$

Dopo somma vettoriale di tutti i contributi, solo componente  $M \parallel z$

$$H = \int dH_{\parallel} = -\frac{M}{4\pi} \int \cos^2 \theta d\Omega = -\frac{M}{2} \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d(\cos \theta)$$

$$\rightarrow \mathbf{H} = -\frac{M}{2 \cdot 3} \cos^3 \theta \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{M}{3}$$

$$\rightarrow \mathbf{H} = -\frac{1}{3} \mathbf{M},$$

Si puo' dimostrare che  $H$  e' uniforme entro la sfera

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}$$

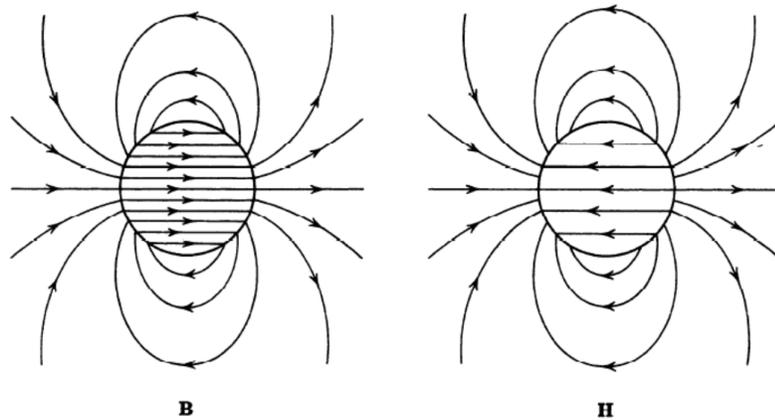
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\left(-\frac{1}{3}\mathbf{M} + \mathbf{M}\right) = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} \quad \text{Uniforme anche } \mathbf{B}$$

Notare:  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  all'interno hanno verso opposto

b) Campo esterno: puro dipolo magnetico

Situazione simile a quella di una sfera dielettrica uniformemente polarizzata

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M} \quad \text{Mom. di dipolo equivalente}$$



Nessuna corrente vera, ma  $\mathbf{H} \neq 0$ :

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \text{ ma contributi da } \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$$

Es: Sfera paramagnetica in c. esterno uniforme

$\mathbf{M}$  uniforme (non dimostrato)

Sommiamo formalmente il campo esterno con il campo di una sfera uniformemente magnetizzata:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{in} &= \mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \\ \mathbf{H}_{in} &= \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} - \frac{\mathbf{M}}{3} \end{aligned} \right\} \text{all'interno della sfera}$$

Inoltre deve valere, all'interno della sfera:

$$\mathbf{B}_{in} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{in}$$

per un materiale magnetico lineare e isotropo

(← non ferromagnetico!)

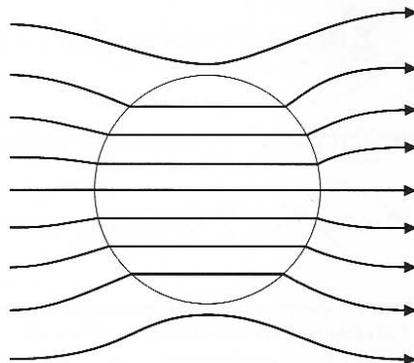
Quindi:

$$\mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} = \mu_0 \mu_r \left( \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} - \frac{\mathbf{M}}{3} \right)$$
$$\rightarrow \mathbf{M} = \frac{3}{\mu_0} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right) \mathbf{B}_0$$

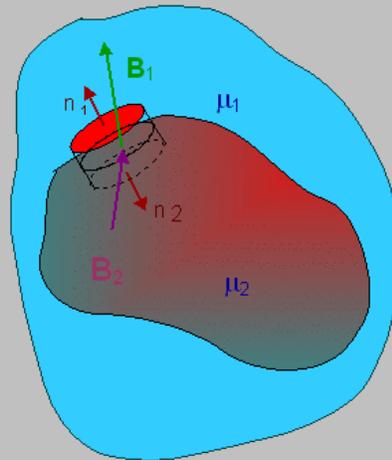
Risultato analogo alla polarizzazione di una sfera dielettrica in un campo elettrico esterno uniforme

Campo totale in ogni punto:

$\mathbf{B}_{tot} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{sfera}$ , dove  $\mathbf{B}_{sfera}$  e' quello trovato prima



Proprieta' di B e H all'interfaccia fra 2 mezzi - 1



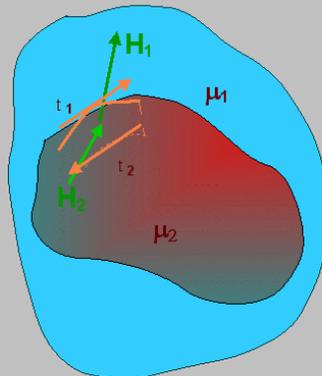
$$\Phi_{cil}(\mathbf{B}) = 0$$

Flusso sup. laterale  $\rightarrow 0$

$$\rightarrow \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$$

*La componente normale di  $\mathbf{B}$  si conserva*

Proprieta' di B e H all'interfaccia fra 2 mezzi - 2



$$\oint_{\sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ in assenza di correnti libere}$$

Circuitazione lati corti  $\rightarrow 0$

$$\rightarrow \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$$

*La componente tangenziale di  $\mathbf{H}$  si conserva*

Risultato valido anche per campi variabili  
( $\Phi(\mathbf{E}) \rightarrow 0$  se lati corti  $\rightarrow 0$ )