Diamagnetismo: Modello di Langevin
Teorema di Larmor

Insieme di particelle cariche, con $\frac{q}{m}$ fisso, soggette a:

Forze centrali
Forze a due corpi(centrali)
C. magnetico

$\rightarrow$ Eq. del moto:

$$m\mathbf{a_k} = \Sigma\mathbf{F_{onk}} = \mathbf{F_k}^{\mathbf{C}} + \Sigma_i \mathbf{F_k}^{i} + q\mathbf{v_k} \times \mathbf{B}$$

Trasformazione a un riferimento in rotazione, vel. angolare $\boldsymbol{\omega}$:
Relaz. fra le accelerazioni nei 2 riferimenti (* in rotazione):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right) + (\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) + (2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}^*)$$

$\rightarrow$ Eq. del moto:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}^* + m(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) + (2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}^*) = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

Relaz. fra le velocita' nei 2 riferimenti

$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + (\boldsymbol{\omega}^*\times\mathbf{r})$, or $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$

$\boldsymbol{\omega}^* = -\boldsymbol{\omega}$

$$\rightarrow m\mathbf{a}^* + m(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) + (2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}^*) = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$$\rightarrow m\mathbf{a}^* + m(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) + (2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}^*) = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i + q\mathbf{v}^*\times\mathbf{B} + q(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{B}$$

$$\rightarrow m\mathbf{a}^* + m(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) - (\mathbf{v}^*\times 2m\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i + q\mathbf{v}^*\times\mathbf{B} - q\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$\rightarrow m\mathbf{a}^* + \left(m\boldsymbol{\omega} + q\mathbf{B}\right)\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - \mathbf{v}^*\times\left(2m\boldsymbol{\omega} + q\mathbf{B}\right) = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i$$

Se: $\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{2m}\mathbf{B}$ freq.di precessione di Larmor

$$\rightarrow m\mathbf{a}^* + \frac{q\mathbf{B}}{2}\times\left(-\frac{q}{2m}\mathbf{B}\times\mathbf{r}\right) = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i$$

$$\rightarrow m\mathbf{a}^* = \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i + \underbrace{\frac{q^2}{4m}\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r})}_{\propto B^2 = piccolo} \approx \mathbf{F}^C + \Sigma\mathbf{F}^i$$

Quindi:
L'effetto del c. magnetico e' quello di sovrapporre una precessione
(di Larmor) con frequenza $\omega_L = -\frac{q}{2m}B$ al moto orbitale senza campo

Elettroni atomici: modello di Rutherford $\rightarrow$ Moto in un campo centrale
Elettrone in moto $\sim$ spira percorsa da corrente $\rightarrow$ Mom. di dipolo magnetico
$i = \frac{e}{T}, T = \frac{2\pi r}{v}$ periodo orbita $\rightarrow i = \frac{ev}{2\pi r}$
$\rightarrow \mu = i\pi r^2 = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$
$L = mvr$ mom. angolare orbitale
$\rightarrow \mu_L = -\frac{e}{2m}L$ mom. magnetico orbitale
In più (senza modello classico):
S mom. angolare di spin
$\rightarrow \mu_S = -\frac{e}{m}S$ mom. magnetico di spin

Caso piu' frequente: Elettroni appaiati
$\rightarrow \sum_i L_i = 0, \ \sum_i S_i = 0,$
$\rightarrow$ Nessun mom. magnetico proprio $(\leftarrow$ non vero per i metalli$)$

Tuttavia, in presenza di un campo $\boldsymbol{B}$: Teorema di Larmor
$\rightarrow$ Precessione dei momenti magnetici individuali attorno a $\boldsymbol{B}$
Frequenza di precessione di Larmor:
$\omega_L = -\frac{eB}{2m}$, uguale per tutti gli elettroni, indipendente da orientamento di $\boldsymbol{\mu}$
$\rightarrow$ Momento magnetico indotto:
$\mu = -\frac{e}{T_L}\pi a^2 = -\frac{e\omega_L}{2\pi}\pi a^2 = -\frac{e^2 B}{4m}a^2$, a raggio dell'orbita di precessione

Raggio quadratico medio dell'orbita centrale:

$\left\langle r^2 \right\rangle = \left\langle x^2 + y^2 + z^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle + \left\langle y^2 \right\rangle + \left\langle z^2 \right\rangle$, piano generico

Raggio quadratico medio dell'orbita legata alla precessione:

$\left\langle a^2 \right\rangle = \left\langle x^2 + y^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle + \left\langle y^2 \right\rangle$, piano $xy \perp \mathbf{B}$

Isotropia $\rightarrow$ $\left\langle x^2 \right\rangle = \left\langle y^2 \right\rangle = \left\langle z^2 \right\rangle$

$$\rightarrow \left\langle a^2 \right\rangle = \frac{2}{3} \left\langle r^2 \right\rangle$$

$$\rightarrow \mu = -\frac{Ze^2 B}{6m} \left\langle r^2 \right\rangle$$

$$\rightarrow M = -n \frac{Ze^2}{6m} \left\langle r^2 \right\rangle B$$

$\rightarrow \chi_m \simeq -\mu_0 n \frac{Ze^2}{6m} \left\langle r^2 \right\rangle$ suscettivita' diamagnetica

Metalli:

$\left.\begin{array}{l}\text{Diamagnetismo di Landau} \\ \text{Paramagnetismo di Pauli}\end{array}\right\}$ (elettroni liberi)

Suscettivita' diamagnetica < 0, piccola

Indipendente da T

Magnetizzazione opposta al c. esterno

C. interno < di quello nel vuoto

Paramagnetismo: Modello di Langevin

En. potenziale di un dipolo immerso in un campo $\mathbf{B}$:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos\theta$$

Insieme di dipoli in c.magnetico a una temperatura T

Distribuzione statistica delle energie: Boltzmann

$$\frac{dn}{dE} \propto e^{-\frac{E}{kT}}$$

$$\rightarrow \frac{dn}{dE} \propto e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}}$$

$$\langle \mu_x \rangle = \frac{\iint_\Omega \mu_x \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}{\iint_\Omega \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}, \langle \mu_y \rangle = \frac{\iint_\Omega \mu_y \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}{\iint_\Omega \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}, \langle \mu_z \rangle = \frac{\iint_\Omega \mu_z \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}{\iint_\Omega \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}$$

Normalizzazione:

$$\iint_\Omega \frac{dn}{d\Omega} d\Omega = N_{mol}$$

$$\mu_x = \mu \sin\theta \cos\varphi$$

$$\mu_y = \mu \sin\theta \sin\varphi$$

$$\mu_z = \mu \cos\theta$$

$$\frac{d^2 n}{d\Omega} = \frac{d^2 n}{\sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{d^2 n}{d(\cos\theta) d\varphi}$$

$$\left. \begin{array}{l} U = -\mu B \cos\theta \\ \dfrac{dn}{dU} \propto e^{-\frac{U}{kT}} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d^2 n}{d(\cos\theta) d\varphi} \propto \frac{dn}{dU} \frac{dU}{d(\cos\theta)} \propto e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}}$$

$$\langle \mu_x \rangle = \frac{\iint\limits_{\Omega} \mu_x \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega}{\iint\limits_{\Omega} \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\iint\limits_{\Omega} \mu \sin\theta \cos\varphi e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d\Omega}{\iint\limits_{\Omega} e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d\Omega}$$

$$\rightarrow \langle \mu_x \rangle \propto \mu \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi}_{=0} \int_{-1}^{+1} \sin\theta e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d(\cos\theta) \rightarrow \langle \mu_x \rangle = 0$$

$$\langle \mu_y \rangle = \frac{\iint\limits_{\Omega} \mu_y \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega}{\iint\limits_{\Omega} \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\iint\limits_{\Omega} \mu \sin\theta \sin\varphi e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d\Omega}{\iint\limits_{\Omega} e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d\Omega}$$

$$\rightarrow \langle \mu_y \rangle \propto \mu \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi}_{=0} \int_{-1}^{+1} \sin\theta e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d(\cos\theta) \rightarrow \langle \mu_y \rangle = 0$$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\iint\limits_{\Omega} \mu_z \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega}{\iint\limits_{\Omega} \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\iint\limits_{\Omega} \mu \cos\theta e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d\Omega}{\iint\limits_{\Omega} e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d\Omega}$$

$$\rightarrow \langle \mu_z \rangle = \frac{\mu \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_{-1}^{+1} \cos\theta e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d(\cos\theta)}{\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d(\cos\theta)} = \mu \frac{\int_{-1}^{+1} \cos\theta e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d(\cos\theta)}{\int_{-1}^{+1} e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} d(\cos\theta)}$$

Sostituzioni: $\left.\begin{array}{l} x = \cos\theta \\ \beta = \frac{\mu B}{kT} \end{array}\right\} \rightarrow \langle \mu_z \rangle = \mu \frac{\int_{-1}^{+1} x e^{\beta x} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{\beta x} dx}$

$$\frac{d}{d\beta}\int e^{\beta x}dx=\int\frac{d}{d\beta}e^{\beta x}dx=\int xe^{\beta x}dx$$

$$\rightarrow\int xe^{\beta x}dx=\frac{d}{d\beta}\int e^{\beta x}dx=\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta}e^{\beta x}\right)=-\frac{1}{\beta^2}e^{\beta x}+\frac{x}{\beta}e^{\beta x}$$

$$x\frac{1}{\beta}e^{\beta x}-\frac{1}{\beta^2}e^{\beta x}\Big|_{-1}^{+1}=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{\beta}-\frac{1}{\beta^2}\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right)$$

$$\langle\mu_z\rangle=\mu\frac{\int_{-1}^{+1}\cos\theta e^{\frac{\mu B\cos\theta}{kT}}d\left(\cos\theta\right)}{\int_{-1}^{+1}e^{\frac{\mu B\cos\theta}{kT}}d\left(\cos\theta\right)}=\frac{\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{\beta}-\frac{1}{\beta^2}\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right)}{\frac{1}{\beta}\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right)}$$

$$\rightarrow\langle\mu_z\rangle=\mu\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{e^{\beta}-e^{-\beta}}-\frac{1}{\beta}\right)=\mu\left(\coth\beta-\frac{1}{\beta}\right)=\mu L(\beta)$$

$L(\beta)$ Funzione di Langevin

Approx. di basso $\boldsymbol{B}$ / alta T:

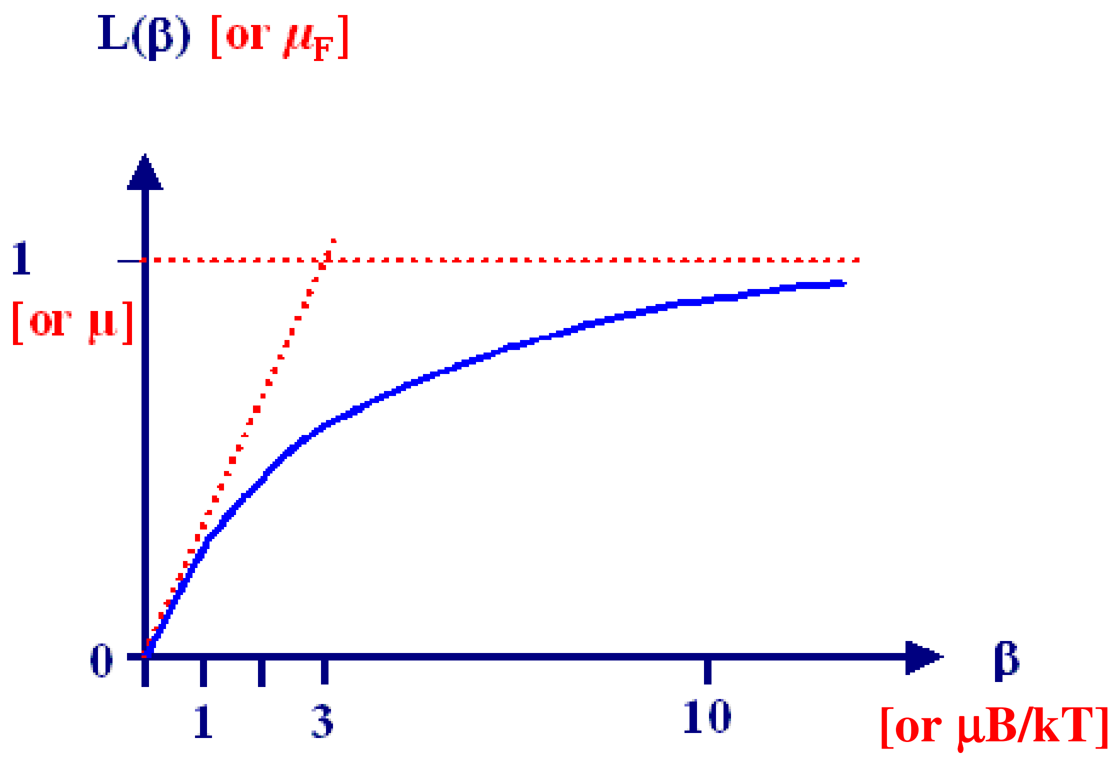
$$\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{e^{\beta}-e^{-\beta}}-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1+\beta+\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^3}{3!}...+1-\beta+\frac{\beta^2}{2!}-\frac{\beta^3}{3!}...}{1+\beta+\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^3}{3!}...-1+\beta-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^3}{3!}...}-\frac{1}{\beta}$$

$$\simeq\frac{2+2\frac{\beta^2}{2!}}{2\beta+2\frac{\beta^3}{3!}}-\frac{1}{\beta}=\frac{1+\frac{\beta^2}{2!}}{\beta+\frac{\beta^3}{3!}}-\frac{1}{\beta}=\left(1+\frac{\beta^2}{2!}\right)\frac{1}{\beta\left(1+\frac{\beta^2}{3!}\right)}-\frac{1}{\beta}$$

$$\simeq\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\beta^2}{2!}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{3!}\right)-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\beta^2}{2!}-\frac{\beta^2}{3!}+...\right)-\frac{1}{\beta}\simeq\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{6}=\frac{\beta}{3}$$

$\rightarrow$ Legge di Curie:

$$\langle\mu_z\rangle\simeq\frac{\mu^2B}{3kT}$$



Funzione di Langevin

$$\langle \mu_z \rangle \simeq \frac{\mu^2 B}{3kT}$$

$$\rightarrow \chi_m^{para} \simeq \mu_0 n \frac{\mu^2}{3kT}$$

Suscettivita' paramagnetica $>0,$ piccola

$($maggiore di quella diamagnetica$),$

decrescente con T

Magnetizzazione concorde con il campo esterno

Campo interno $>$ di quello nel vuoto

$\chi_m = \mu_r - 1$ (in unita' di 10^{-5})

Paramagnetic	
Iron oxide (FeO)	**720**
Uranium	**40**
Platinum	**26**
Tungsten	**6.8**
Cesium	**5.1**
Aluminum	**2.2**
Lithium	**1.4**
Magnesium	**1.2**
Sodium	**0.72**
Oxygen gas	**0.19**

Diamagnetic	
Ammonia	**-.26**
Bismuth	**-16.6**
Mercury	**-2.9**
Silver	**-2.6**
Carbon (diamond)	**-2.1**
Carbon (graphite)	**-1.6**
Lead	**-1.8**
Sodium chloride	**-1.4**
Copper	**-1.0**
Water	**-0.91**

Energia correnti stazionarie in presenza di materiali magnetici:

Nel vuoto

$U_m^0 = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 dV,\ B$ originato da correnti di conduzione

Nei mezzi magnetici lineari:

$U_m = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}dV,\ B$ originato da correnti di conduzione e magnetizzazione

Infatti:'Accensione' delle correnti di conduzione

$\rightarrow$ Correnti di magnetizzazione $\rightarrow$ C. magnetici variabili $\rightarrow$ C. elettrici indotti

$\rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$

Potenza/unita' di volume: $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}_c$

$\rightarrow$ Lavoro dei generatori in δt per compensare:

$$\delta W = -\delta t \int_{spazio} \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}_c dV = -\delta t \int_{spazio} \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})dV$$

$$(\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}$$

$$\rightarrow \delta W = -\delta t \int_{spazio} \left[-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}\right]dV$$

$$\rightarrow \delta W = \cancel{+\delta t \int_{spazio} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV} - \delta t \int_{spazio} (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}dV$$

$$\rightarrow \delta W = -\delta t \int_{spazio} (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}dV = +\delta t \int_{spazio} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{H}dV$$

$\rightarrow \delta W = + \int_{spazio} \delta\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}dV,$ valida in generale

Per mezzi lineari: $\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$ ($\leftarrow$ Non vero per ferromagneti)

$$\rightarrow \delta\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$$

$$\rightarrow \delta W = +\frac{1}{2}\int_{spazio} \delta(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})dV$$

$$\rightarrow W = U_m = \frac{1}{2}\int_{spazio} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}dV$$

Densita' di en. magnetica: $u_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$