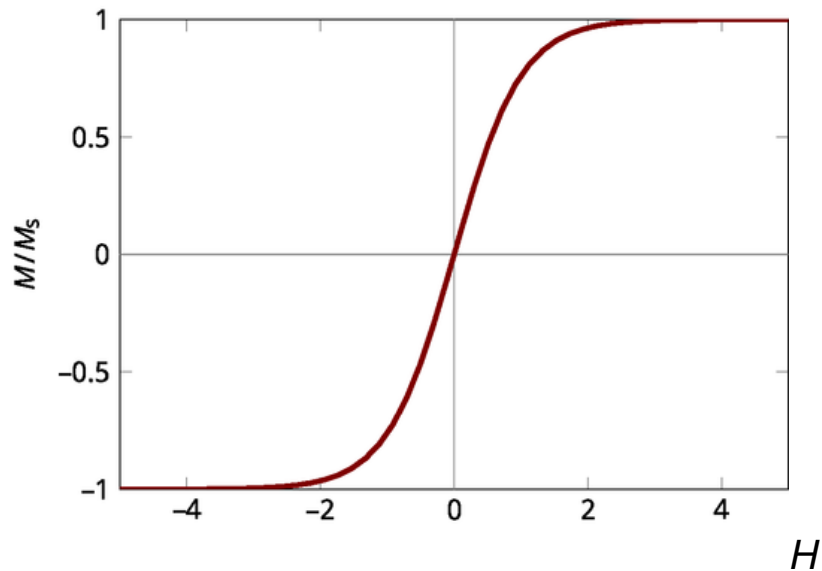


Relaz. fra  $M$  e  $H$  per dia- e para-magneti:

$$M = \chi_m H, \chi_m \text{ costante}$$

NB Nel caso del paramagnetismo, approssimazione di alta temperatura

In generale: Relazione esatta non-lineare, effetti di saturazione



Relaz. fra  $M$  e  $H$  per ferro-magneti:

$$M = f(H), f \text{ funz. non lineare}$$

Comportamento ferromagnetico, ferrimagnetico, antiferromagnetico:

derivante dall'accoppiamento fra i dipoli magnetici microscopici,

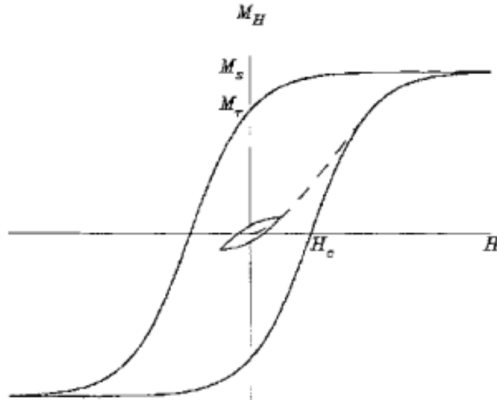
→ allineamento dei dipoli

NB Stessi effetti osservati nei ferroelettrici, cause completamente diverse

Allineamento nel caso dei ferromagneti: origine nell'*energia di scambio*

Effetto interamente quantistico, *non* dovuto a interazione magnetica

## Caratteristica macroscopica: Ciclo di isteresi



$M_s$  = magnetizzazione di saturazione

$M_r$  = magnetizzazione residua

$H_c$  = campo coercitivo

Linea tratteggiata:  
prima magnetizzazione

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \rightarrow \mu_r = \mu_r(H) \text{ per ferromagneti}$$

$\mu_r$  non costante, *molto* grande:

Table 1. Relative Permeability of Materials

Material	Relative Permeability	Classification
Vacuum	<b>1</b>	Non-magnetic
Silver	0.99998	Diamagnetic
Aluminum	1.00002	Paramagnetic
Cobalt	250	Ferromagnetic
Nickle	600	Ferromagnetic
Iron	50000	Ferromagnetic

Origine del ciclo di isteresi: Struttura a domini

Solidi ferromagnetici: forte interazione dipolo-dipolo (non magnetica)

→ Formazione di zone a magnetizzazione uniforme,  
con orientazione casuale

In presenza di c. esterno crescente:

progressivo allineamento dei domini, merging in domini via via più grandi

$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{sat}$  valore max.

In presenza di c. esterno decrescente:

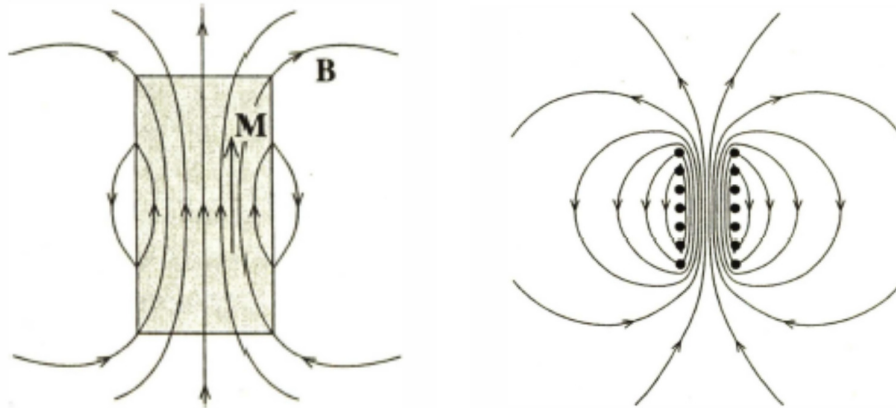
riduzione allineamento, a ritmo ridotto perchè i domini allineati  
sono più grandi

$\mathbf{M} \neq 0$  residua a  $\mathbf{H} = 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$  a  $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_c$  coercitivo

Campi all'interno di un materiale ferromagnetico

Es cilindro magnetizzato uniformemente

Campo  $\mathbf{B}$  = solenoide



Discontinuita' su sup. laterale:  $B_{\text{tang}}$

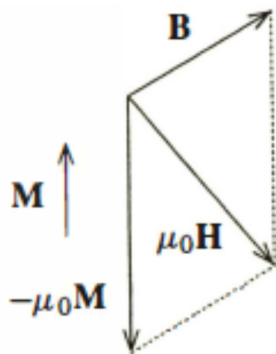
$\Delta B_{\text{tang}} = \mu_0 k_m$ ,  $k_m$  corr. superficiale di magnetizzazione

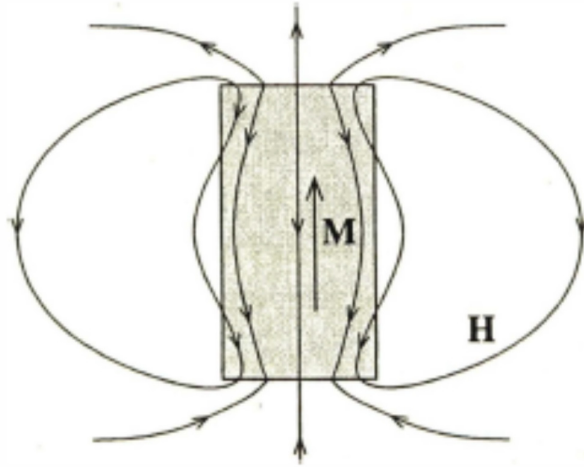
Campo  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Fuori dal mezzo:  $\mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \rightarrow$  Stesse linee di campo

Dentro il mezzo: Forti differenze fra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$





Osservazioni:

$\mathbf{H}$  esterno  $\parallel \mathbf{B}$

$\mathbf{H}$  interno completamente diverso:

Discontinuita' sui poli  $\leftrightarrow$  Presenza di magnetizzazione

Equivalente a cariche magnetiche  $\leftrightarrow$  Sorgenti e pozzi di  $\mathbf{H}$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

Definendo

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m$$

Poiche'

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \text{ (assenza di } \mathbf{j}_c \text{)}$$

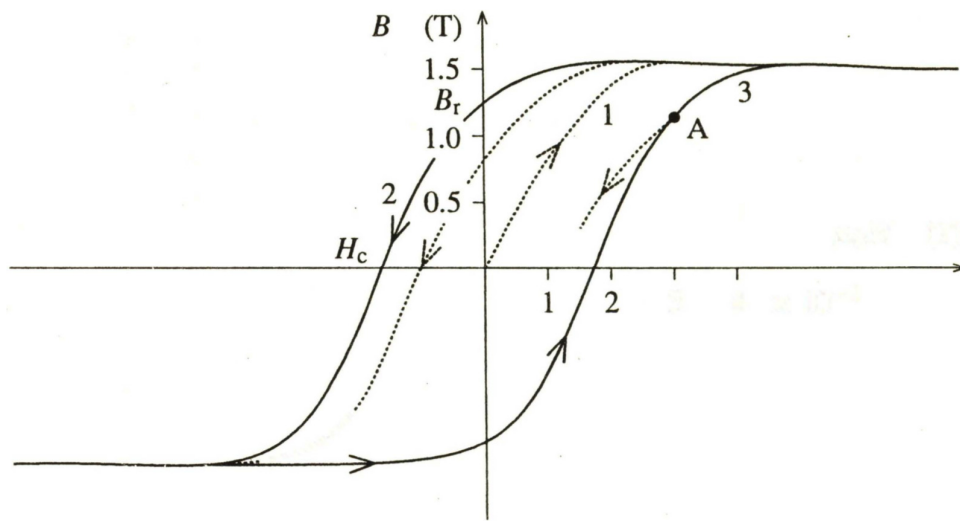
$\rightarrow \mathbf{H}$  'come c. elettrostatico'

In realta':

$$\mathbf{M} \text{ uniforme } \parallel z \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{M} = \cancel{\frac{\partial M_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial M_y}{\partial y}} + \frac{\partial M_z}{\partial z}$$

$\rightarrow$  Discontinuita' di  $M_z$  equivalenti a poli magnetici

## Osservazioni sul ciclo d'isteresi

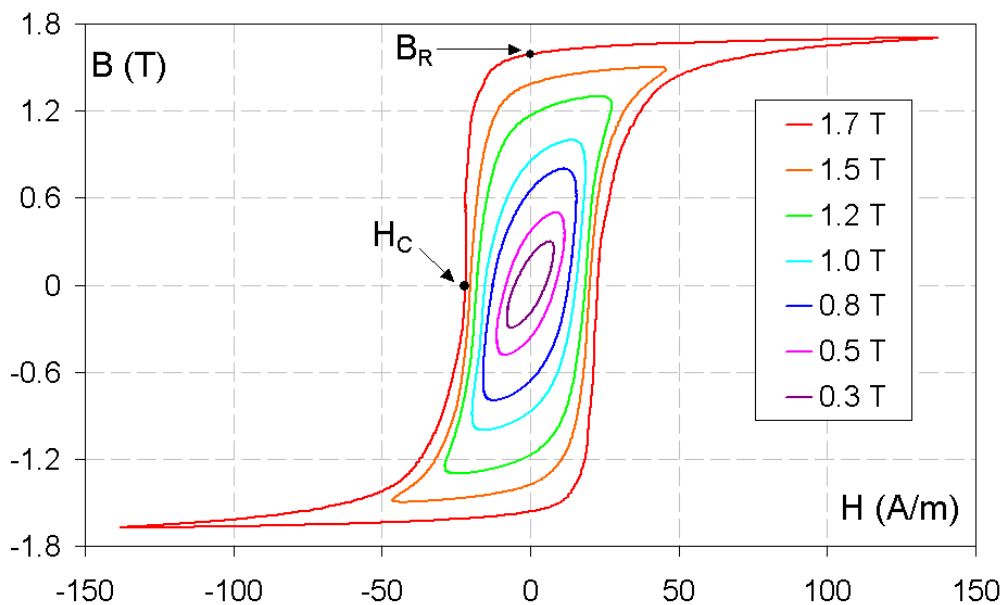


Curva di prima magnetizzazione

Magnetizzazione di saturazione  $\sim$  Campo di saturazione? Non esatto:

$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \rightarrow$  Se  $\mathbf{M}$  non aumenta piu',  $\mathbf{B}$  incrementa come  $\mu_0 \mathbf{H}$

Isteresi incompleta = Cicli con estensione ridotta, senza saturazione



Applicazioni ferromagnetismo:

Induttanze, elettromagneti, generatori, motori elettrici, ...

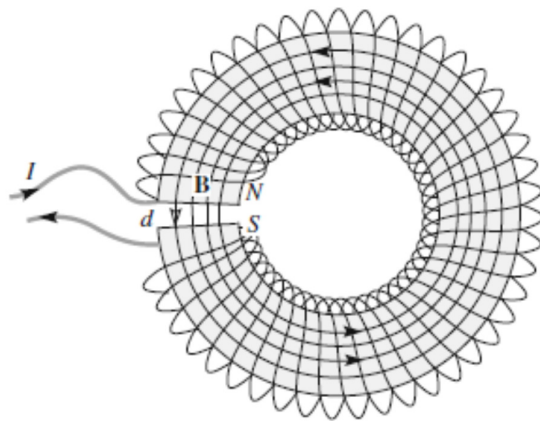
Es: Induttanza

Se  $M \ll M_{sat} \rightarrow B \approx \mu_0 \mu_r H, \mu_r = \mu_r(0) \simeq \text{cost}$

$$\rightarrow B \approx \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} \rightarrow \Phi(B) = BNA \approx \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I}{l} A$$

$$\rightarrow L \approx \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} A \approx \mu_r L_{vuoto}$$

Es.: Elettromagnete



Esempio semplice: toroide con taglio

Larghezza taglio:  $d$

$d \ll 2\pi R \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{H}$  nel toroide  $\approx \mathbf{B}, \mathbf{H}$  senza taglio

Conservazione  $\mathbf{B}_\perp \rightarrow \mathbf{B}$  in aria  $\approx \mathbf{B}$  in ferro

$\mathbf{M}$  uniforme in ferro, nullo nel taglio

$\rightarrow -\nabla \cdot \mathbf{M}$  molto grande alla discontinuita'

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI \rightarrow H_{Fe} 2\pi R + H_{aria} d = NI$$

$$H_{aria} = \frac{B}{\mu_0}$$

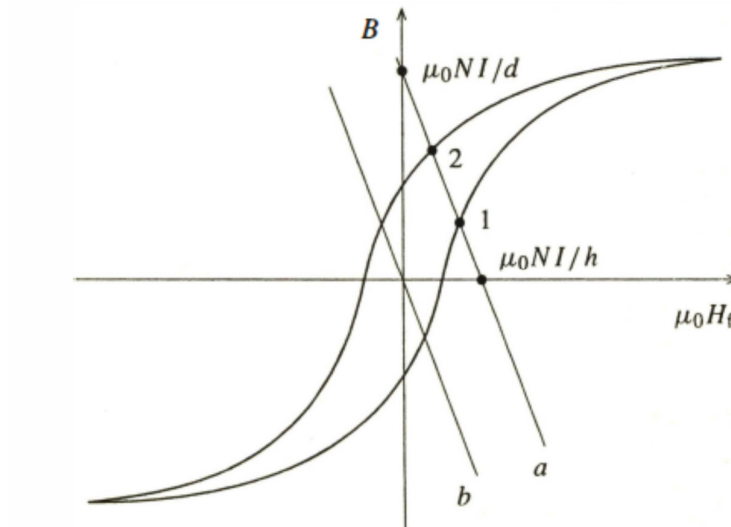
$$\rightarrow \mu_0 H_{Fe} 2\pi R + Bd = \mu_0 NI$$

Inoltre:  $B = B(H_{Fe})$  ciclo di isteresi

$H_{Fe}, B$  incogniti

→ Per trovare  $B, H_{Fe}$  :

Intersezione relazione lineare - ciclo di isteresi:



Soluzione punti 1 e 2, dipendente da quale ramo del ciclo si sta percorrendo

a) Caso  $I \neq 0$

b) Caso  $I = 0$

$I = 0 \rightarrow B, H_{Fe}$  in genere  $\neq 0$

Soluz. approssimata ( $B$  piccolo, ciclo d'isteresi stretto):

$$B \approx \mu_0 \mu_r H_{Fe}$$

$$\rightarrow \mu_0 H_{Fe} 2\pi R + Bd = \frac{B}{\mu_r} 2\pi R + Bd = \mu_0 NI$$

$$\rightarrow B \left( \frac{1}{\mu_r} 2\pi R + d \right) = \mu_0 NI$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{2\pi R}{\mu_r} + d}$$

$$\rightarrow \Phi(B) = SB = \frac{\mu_0 NIS}{\frac{2\pi R}{\mu_r} + d}, \text{ costante lungo il circuito magnetico}$$

$$\rightarrow \Phi(B) = \frac{NI}{R}, \text{ legge di Hopkinson}$$

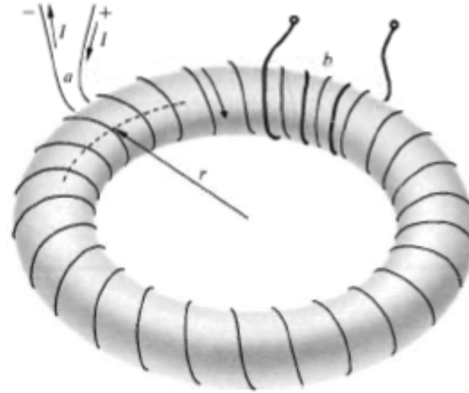
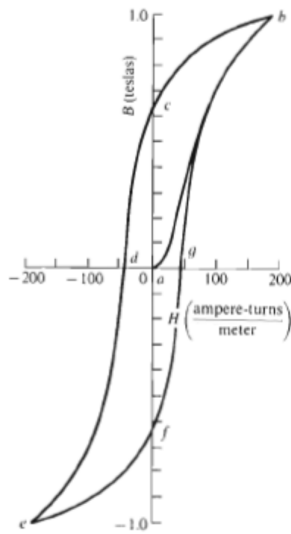
$NI$  forza magnetomotrice

$$R = \underbrace{\frac{2\pi R}{\mu_0 \mu_r S}}_{Fe} + \underbrace{\frac{d}{\mu_0 S}}_{Gap} \text{ riluttanza}$$

Simile a legge di Ohm:

Nel circuito magnetico le riluttanze si combinano come le resistenze nel circuito elettrico





Lavoro speso ogni dato ciclo di isteresi

Tratto  $gb$  del ciclo:

Incremento di corrente  $\rightarrow$  Forza contro-elettromotrice indotta

Potenza spesa dal generatore per compensare fcm:

$$P = iN \frac{d\Phi}{dt} = iNS \frac{dB}{dt} = \frac{iN}{l} Sl \frac{dB}{dt}$$

C. magnetizzante:

$$H = \frac{iN}{l} \rightarrow P = HV \frac{dB}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

$$\rightarrow W = \int \frac{dW}{dt} dt = V \int H \frac{dB}{dt} dt = V \int_g^b H dB$$

Su tutto il ciclo:

$$W = V \oint H dB = \text{area del ciclo}$$