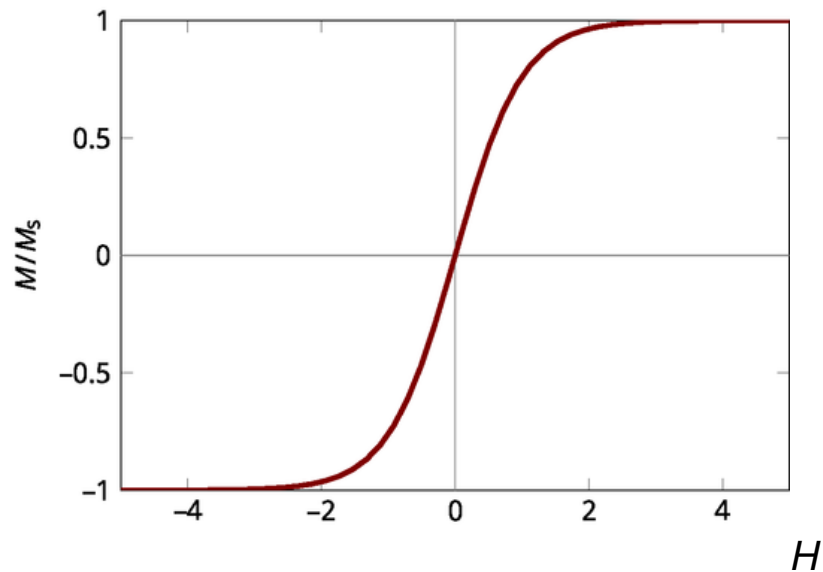


Relaz. fra M e H per dia- e para-magneti:

$$M = \chi_m H, \chi_m \text{ costante}$$

Nel caso del paramagnetismo, approssimazione di alta temperatura

In generale: Relazione esatta non-lineare, effetti di saturazione



Relaz. fra M e H per ferro-magneti:

$$M = f(H), f \text{ funz. non lineare}$$

Comportamento ferromagnetico, ferrimagnetico, antiferromagnetico:

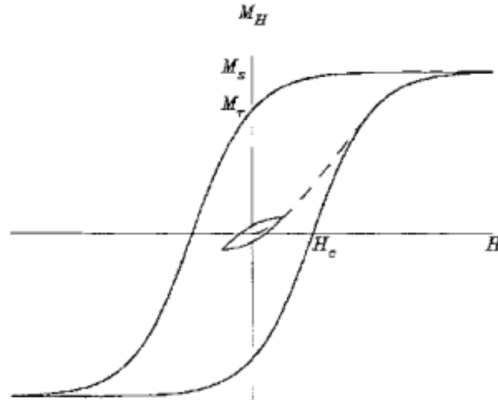
derivante dall'accoppiamento fra i dipoli magnetici microscopici,

→ allineamento dei dipoli

Stessi effetti osservati nei ferroelettrici, cause completamente diverse

Allineamento nel caso dei ferromagneti: origine nell'energia di scambio

Caratteristica macroscopica: Ciclo di isteresi



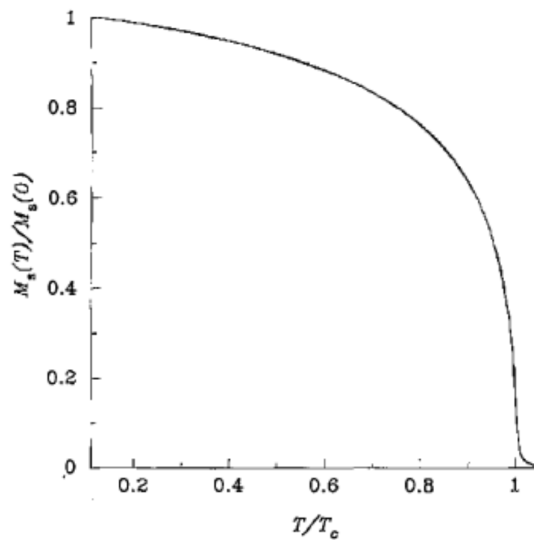
M_s = magnetizzazione di saturazione

M_r = magnetizzazione residua

H_c = campo coercitivo

Linea tratteggiata: prima magnetizzazione

Dipendenza di M da T :



T_c = temperatura critica

Transizione di fase:

Ferromagnetico $\leftrightarrow$ Paramagnetico

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \rightarrow \mu_r = \mu_r(H) \text{ per ferromagneti}$$

μ_r non costante, *molto* grande:

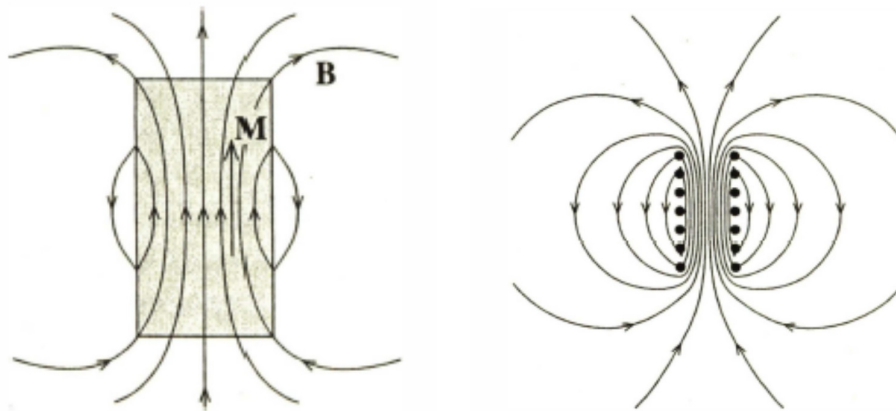
Table 1. Relative Permeability of Materials

Material	Relative Permeability	Classification
Vacuum	0	Non-magnetic
Silver	0.99998	Diamagnetic
Aluminum	1.00002	Paramagnetic
Cobalt	250	Ferromagnetic
Nickle	600	Ferromagnetic
Iron	50000	Ferromagnetic

Campi all'interno di un materiale ferromagnetico

Es cilindro magnetizzato uniformemente

Campo **B** = solenoide



Discontinuità' su sup. laterale: B_{tang}

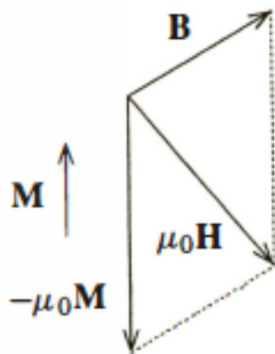
$\Delta B_{\text{tang}} = \mu_0 k_m$, k_m corr. superficiale di magnetizzazione

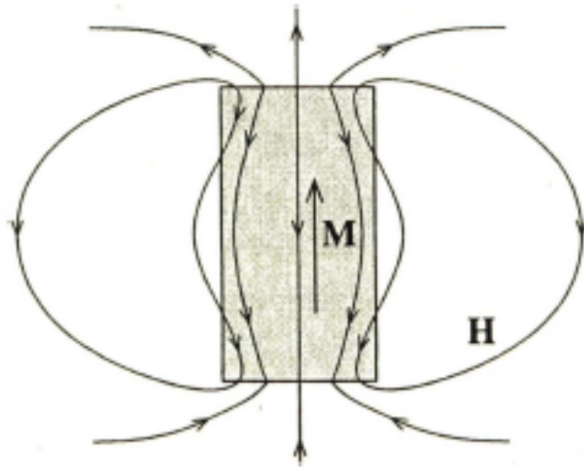
Campo **H**:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Fuori dal mezzo: $\mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \rightarrow$ Stesse linee di campo

Dentro il mezzo: Forti differenze fra **B** e **H**





Osservazioni:

H esterno $\parallel$ **B**

H interno completamente diverso:

Discontinuità sui poli $\leftrightarrow$ Presenza di magnetizzazione

Equivalente a cariche magnetiche $\leftrightarrow$ Sorgenti e pozzi di **H**

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

Definendo

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m$$

Poiché

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \text{ (assenza di } \mathbf{j}_c \text{)}$$

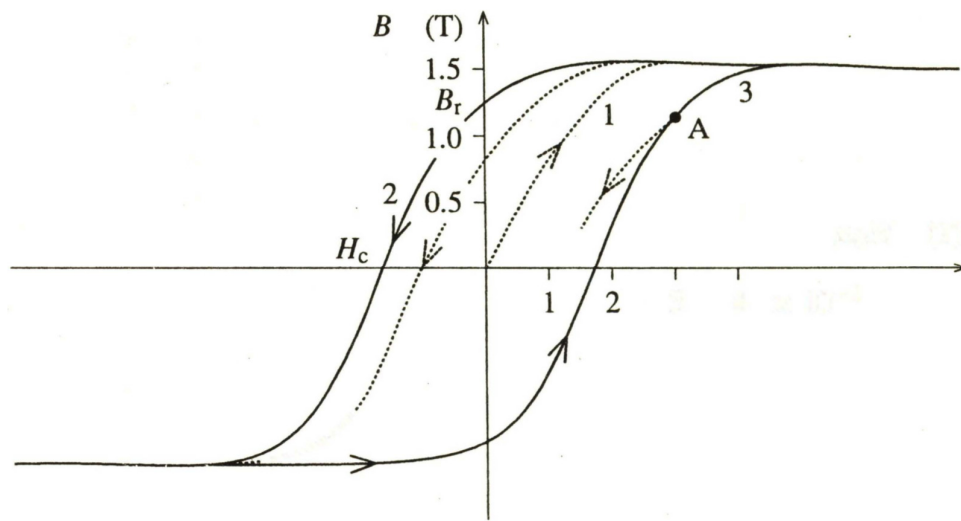
$\rightarrow$ **H** 'come c. elettrostatico'

In realtà:

$$\mathbf{M} \text{ uniforme } \parallel z \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{M} = \cancel{\frac{\partial M_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial M_y}{\partial y}} + \frac{\partial M_z}{\partial z}$$

$\rightarrow$ Discontinuità di M_z equivalenti a poli magnetici

Osservazioni sul ciclo d'isteresi



Curva di prima magnetizzazione

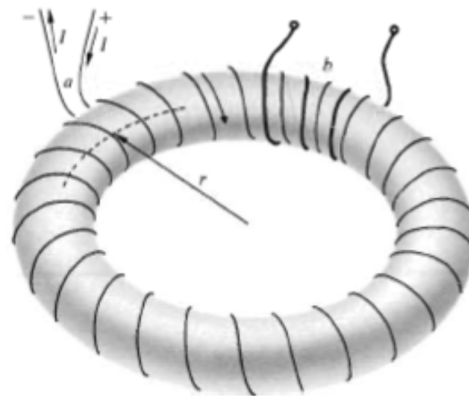
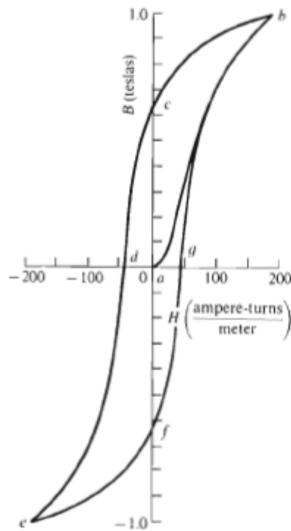
Magnetizzazione di saturazione $\sim$ Campo di saturazione

Non esatto:

$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \rightarrow$ Se $\mathbf{M}$ non aumenta piu', $\mathbf{B}$ incrementa come $\mu_0 \mathbf{H}$

Campo coercitivo

Isteresi incompleta = Cicli con estensione ridotta, senza saturazione



Lavoro speso ogni dato ciclo di isteresi

Tratto gb del ciclo:

Incremento di corrente $\rightarrow$ Forza contro-elettromotrice indotta

Potenza spesa dal generatore per compensare f_{cem} :

$$P = iN \frac{d\Phi}{dt} = iNS \frac{dB}{dt} = \frac{iN}{l} Sl \frac{dB}{dt}$$

C. magnetizzante:

$$H = \frac{iN}{l} \rightarrow P = HV \frac{dB}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

$$\rightarrow W = \int \frac{dW}{dt} dt = V \int H \frac{dB}{dt} dt = V \int_g^b H dB$$

Su tutto il ciclo:

$$W = V \oint H dB = \text{area del ciclo}$$

Applicazioni ferromagnetismo:

Induttanze, elettromagneti, generatori, motori elettrici, ...

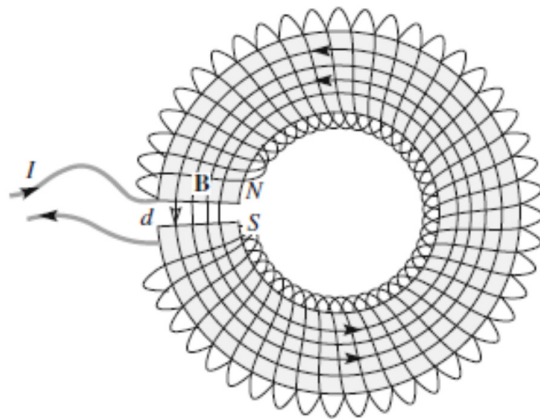
Es: Induttanza

Se $M \ll M_{sat} \rightarrow B \approx \mu_0 \mu_r H, \mu_r = \mu_r(0) \simeq \text{cost}$

$$\rightarrow B \approx \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} \rightarrow \Phi(B) = BNA \approx \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I}{l} A$$

$$\rightarrow L \approx \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} A \approx \mu_r L_{vuoto}$$

Es.: Elettromagnete



Esempio semplice: toroide con taglio

Larghezza taglio: d

$d \ll 2\pi R \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{H}$ nel toroide $\approx \mathbf{B}, \mathbf{H}$ senza taglio

Conservazione $\mathbf{B}_\perp \rightarrow \mathbf{B}$ in aria $\approx \mathbf{B}$ in ferro

$\mathbf{M}$ uniforme in ferro, nullo nel taglio

$\rightarrow -\nabla \cdot \mathbf{M}$ molto grande alla discontinuità

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI \rightarrow H_{Fe} 2\pi R + H_{aria} d = NI$$

$$H_{aria} = \frac{B}{\mu_0}$$

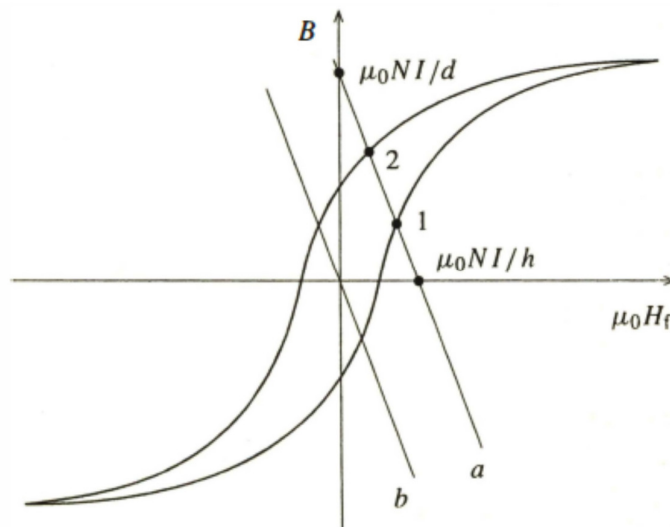
$$\rightarrow \mu_0 H_{Fe} 2\pi R + Bd = \mu_0 NI$$

H_{Fe}, B incogniti

Inoltre: $B = B(H_{Fe})$ ciclo di isteresi

→ Per trovare B, H_{Fe} :

Intersezione relazione lineare - ciclo di isteresi:



Soluzione punti 1 e 2, dipendente da quale ramo del ciclo si sta percorrendo

a) Caso $I \neq 0$

b) Caso $I = 0$

$I = 0 \rightarrow B, H_{Fe}$ in genere $\neq 0$

Soluz. approssimata (B piccolo, ciclo d'isteresi stretto):

$$B \approx \mu_0 \mu_r H_{Fe}$$

$$\rightarrow \mu_0 H_{Fe} 2\pi R + Bd = \frac{B}{\mu_r} 2\pi R + Bd = \mu_0 NI$$

$$\rightarrow B \left(\frac{1}{\mu_r} 2\pi R + d \right) = \mu_0 NI$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{2\pi R}{\mu_r} + d}$$

$$\rightarrow \Phi(B) = SB = \frac{\mu_0 NIS}{\frac{2\pi R}{\mu_r} + d}, \text{ costante lungo il circuito magnetico}$$

$$\Phi(B) = \frac{NI}{R}$$

NI forza magnetomotrice

$$R = \frac{2\pi R}{\underbrace{\mu_0 \mu_r S}_{Fe}} + \frac{d}{\underbrace{\mu_0 S}_{Gap}} \quad \text{riluttanza}$$

Simile a legge di Ohm

Energia correnti stazionarie in presenza di materiali magnetici:

Caso rilevante = Ferromagneti

Nel vuoto

$$U_m^0 = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV, \quad B \text{ originato da correnti di conduzione}$$

Nei mezzi magnetici lineari:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV, \quad B \text{ originato da correnti di conduzione e magnetizzazione}$$

Infatti: 'Accensione' delle correnti di conduzione

→ Correnti di magnetizzazione → C. magnetici variabili → C. elettrici indotti

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Potenza/unità di volume: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_c$

→ Lavoro dei generatori in δt per compensare:

$$\delta W = -\delta t \int_{\text{spazio}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_c dV = -\delta t \int_{\text{spazio}} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV$$

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}$$

$$\rightarrow \delta W = -\delta t \int_{\text{spazio}} [-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}] dV$$

$$\rightarrow \delta W = +\delta t \int_{\text{spazio}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV - \delta t \int_{\text{spazio}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} dV$$

$$\rightarrow \delta W = -\delta t \int_{\text{spazio}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} dV = +\delta t \int_{\text{spazio}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dV$$

$$\rightarrow \delta W = + \int_{\text{spazio}} \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV, \quad \text{valida in generale}$$

$$\text{Per mezzi lineari: } \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \rightarrow \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$\rightarrow \delta W = + \frac{1}{2} \int_{\text{spazio}} \delta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV$$

$$\rightarrow W = U_m = \frac{1}{2} \int_{\text{spazio}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

$$\text{Densità di en. magnetica: } u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$