Forza coulombiana: conservativa $\rightarrow$ Campo coulombiano: conservativo
Matematicamente simile a forza gravitazionale
Infatti:
Spostamento di q nel campo di q_0 da 1 a 2

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

Lavoro fatto da forza che equilibra $\mathbf{F}$ punto per punto:

$$\rightarrow L_{12} = -\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}\cdot d\mathbf{s} = -q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dr}{r^2}$$

$$\rightarrow L_{12} = -q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right) = q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$\rightarrow L_{12}$ indipendente dal percorso
$\rightarrow \mathbf{F}$ conservativa

$\rightarrow$ Esiste $U(\mathbf{r})$ t.c.
$\rightarrow L_{12} = U(r_2) - U(r_1) = \Delta U$ variaz. en. potenziale

En. potenziale elettrostatica:

$U(r) = q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C, \quad C$ arbitraria: spesso scelta $=0$

Altro modo di descrivere $\mathbf{E}$ come campo conservativo:

$$\int_{!:A\rightarrow B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = -\int_{2:B\rightarrow A} \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} \rightarrow \oint_{1+2} \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = 0$$

Teo. del rotore:

$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \iint_\Sigma (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma,\ \Sigma$ sup. delimitata da Γ

$\rightarrow \oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = 0 \Rightarrow \nabla\times\mathbf{F} = 0$ perche' Γ e' arbitraria

$\rightarrow \oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = 0 \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E}$ irrotazionale

Potenziale elettrostatico:

$$\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)=-\int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s}$$

Diff. di pot. coulombiana (carica puntiforme):

$$\Delta\phi(r)=-\int_1^2 \underbrace{\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}}_{\mathbf{E}}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dr}{r^2}=-\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

Diff. di pot. fra distanza di riferimento r_0 e distanza generica r :

$\phi(r)-\phi(r_0)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}-\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_0},$ con q_0 nell'origine:

Pot. in un punto qualsiasi:

$\rightarrow \phi(r)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}+C,\quad C$ scelta spesso $=0$ $\left(\leftarrow \phi(r)\right.$ va a 0 all'$\left.\infty\right)$

Nota: ϕ definito a meno di una costante

$\phi \rightarrow \phi' = \phi + C,$ trasformazione di gauge

Forza lasciata invariata da trasf. di gauge:

Forza grandezza fisica, potenziale ausilio matematico (in fisica classica)

Per distribuzione di carica qualsiasi: Principio di sovrapposizione

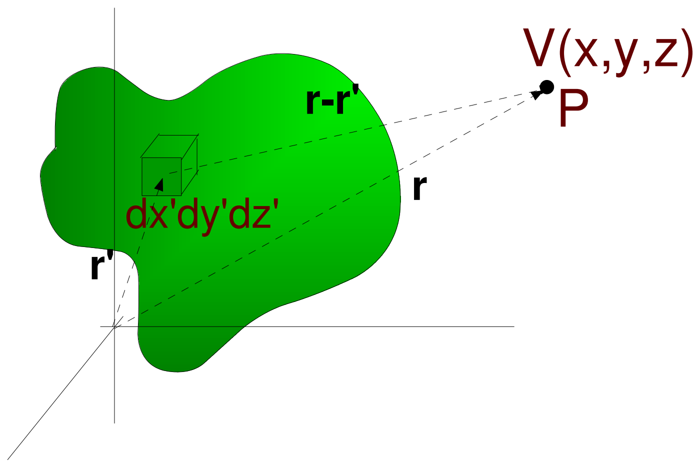
$\rightarrow$ Somma/Integrale sulla distribuzione

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Espressioni simili per distribuzioni superficiali o lineari

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$: distanza fra elemento di carica in $\mathbf{r}'$

e punto in cui si considera il potenziale in $\mathbf{r}$



$$dq = \rho(x', y', z') dx' dy' dz'$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dx' dy' dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$$V = \int dV = \int_{\substack{voluem \\ della \\ carica}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dx' dy' dz'}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}}$$

Esempi

Pot. filo carico indefinito

r_0 distanza di riferimento: solo differenze di potenziale significative

$$\phi(r)-\phi(r_0)=-\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

Pot. in un punto:

$$\phi(r)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+C$$

In questo caso, per avere $\phi=0$ all'∞ occorrerebbe porre $C=\infty$

Infatti: Pot. *crescente* all'∞ con r (*decrescente* a $-\infty$ per $\lambda<0$):

Motivo: Carica totale $=\infty$

Pot. piano carico indefinito

r_0 distanza di riferimento: solo differenze di potenziale significative

$$\phi(r)-\phi(r_0)=-\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}dr'=-\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma r_0}{2\varepsilon_0}$$

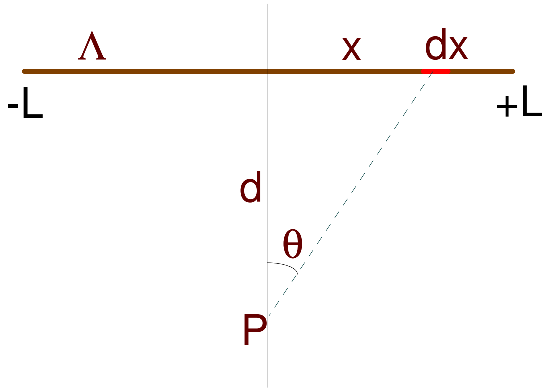
Pot. in un punto:

$$\phi(r)=-\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}+C$$

Anche in questo caso, per avere $\phi=0$ all'∞ occorrerebbe porre $C=\infty$

Situazione simile a filo carico, per gli stessi motivi

Filo carico finito: pot. elettrostatico nei punti sull'asse



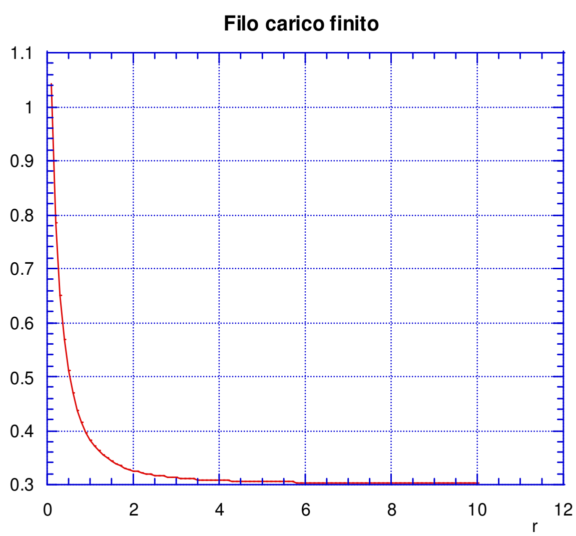
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Lambda dx}{r}$$

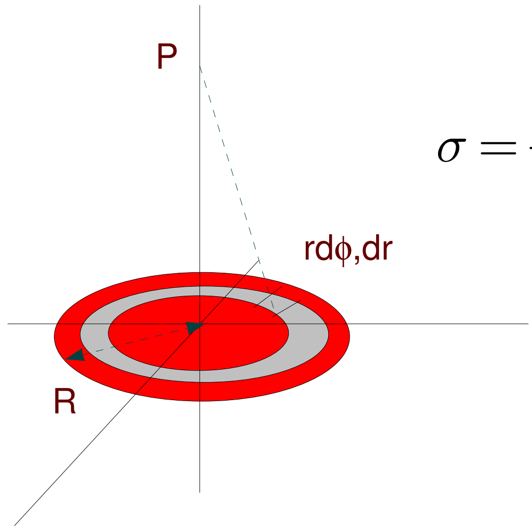
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Lambda dx}{\left(d^2+x^2\right)^{1/2}}$$

$$\rightarrow V = \frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+L}\frac{dx}{\left(d^2+x^2\right)^{1/2}} = \frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+d^2}\right)\Big|_0^L$$

$$\rightarrow V = \frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L+\sqrt{L^2+d^2}\right)-\ln d\right]$$

$$\rightarrow V = \frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right]$$





$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$dq = \sigma dA = \sigma\ dr\ rd\varphi$$

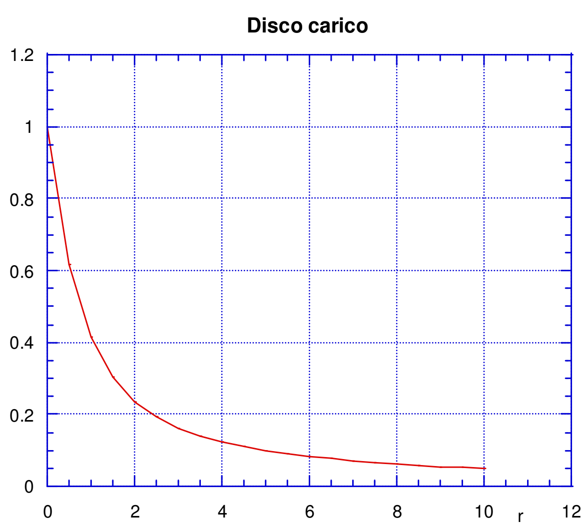
$$u^2 = r^2 + z^2$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\ dr\ rd\varphi}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{disco}\frac{\sigma\ dr\ rd\varphi}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$\rightarrow V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\ dr}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}} =$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r^2+z^2\right)^{1/2}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2} - z\right]$$



Relazione fra potenziale e campo:

Teorema del gradiente

$\phi(\mathbf{r})$ funzione scalare qualsiasi

$\rightarrow \phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla\phi\cdot d\mathbf{s},$ percorso qualsiasi

$\rightarrow \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ int. di linea del c. elettrostatico e' indipendente dal cammino

$\rightarrow \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=0$ circuitazione del c. elettrostatico e' $\equiv 0$

$\rightarrow \mathbf{E}=-\nabla\phi$ c. elettrostatico e' il gradiente del p. elettrostatico

$\rightarrow \nabla\times\mathbf{E}=\nabla\times(-\nabla\phi)=0$ c. elettrostatico e' irrotazionale

C. elettrostatico dal potenziale:

$$E=-\nabla V$$

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\ \text{etc}$$

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$$

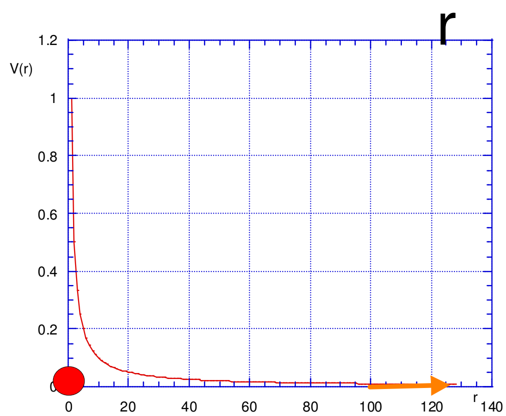
$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{2x}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$E_x=-\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}\right), E_y, E_z\ \text{ analoghi}$$

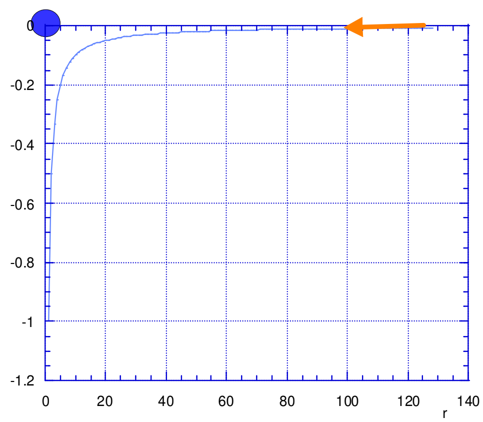
$$\mathbf{E}=E_x\hat{\mathbf{i}}+E_y\hat{\mathbf{j}}+E_z\hat{\mathbf{k}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}\hat{\mathbf{i}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3}\hat{\mathbf{j}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$$

Carica puntiforme



Carica +va:
V decrescente
Derivata -va
con segno - OK!



Carica -va:
V crescente
Derivata +va
con segno - OK!