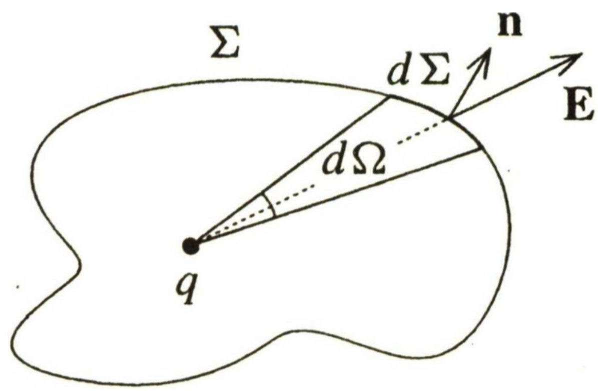
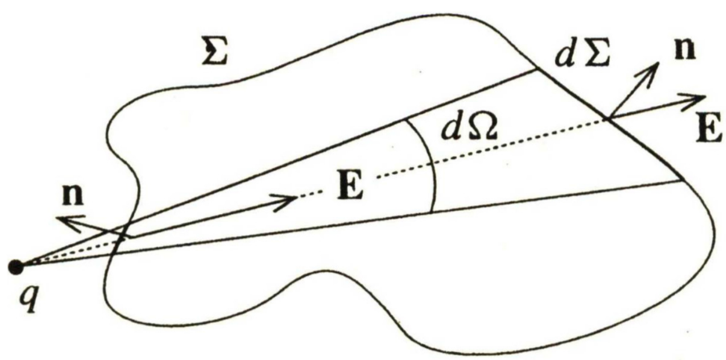
Flusso del campo coulombiano attraverso una superficie che racchiude la carica puntiforme:



$$d\Phi = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$\rightarrow \Phi = \int d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$, la superficie gaussiana racchiude la carica

Se la carica e' fuori:



2 contributi all'elemento di flusso da 2 elementi di superficie intercettati dallo stesso angolo solido: contributi uguali e opposti per verso opposto dei versori normali $\rightarrow$ totale = 0

$\rightarrow \Phi = 0$, la superficie gaussiana non contiene la carica

Regola generale:

$$\int_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{n}d\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0},\ q_{\text{int}}\ \text{carica netta totale all'interno di } \Sigma$$

Estendendo al caso di una distribuzione continua:

Teorema di Gauss in forma integrale

$$\int_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{n}d\Sigma = \frac{\int_V \rho(\mathbf{r})\,dV}{\varepsilon_0},\ V\ \text{volume delimitato da } \Sigma$$

Teorema della divergenza:

$$\int_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{n}d\Sigma = \int_V \nabla\cdot\mathbf{E}dV$$

$$\rightarrow \int_\Sigma \mathbf{E}\cdot\hat{n}d\Sigma = \int_V \nabla\cdot\mathbf{E}dV = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}$$

Per l'arbitrarieta'del volume V :

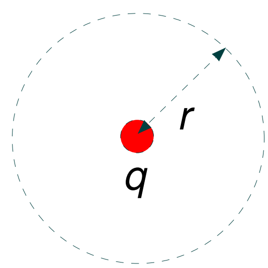
$$\rightarrow \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad \text{Teo. di Gauss in forma differenziale}$$

Applicazione del teorema di Gauss per trovare il c. elettrostatico:

Solo per sistemi ad elevata simmetria

Esempi

1) Carica puntiforme



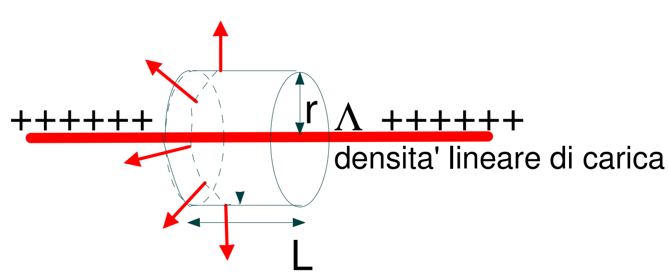
Simmetria sferica di ***E*** (non ci sono direzioni privilegiate)
→Superficie gaussiana adatta: sfera
→Campo indipendente da θ,ϕ, diretto radialmente per simmetria

Flusso:

$$\rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2) Filo indefinito carico uniformemente



Simmetria cilindrica di ***E***

→Superficie gaussiana adatta: cilindro

→Campo indipendente da ϕ, diretto $\perp$ al filo per simmetria

Flusso:

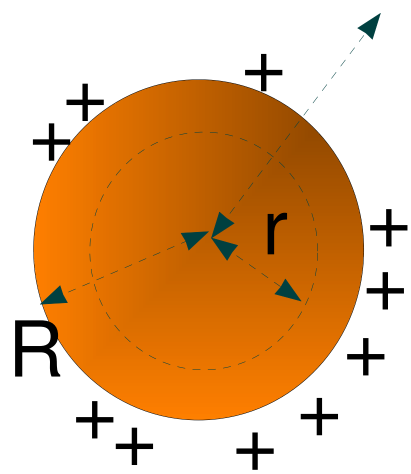
$$\Phi_{basi} = 0$$

$$\Phi_{lat} = E 2\pi r L$$

$$\rightarrow E 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\Lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{\Lambda L}{2\pi\varepsilon_0 r L} = \frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

3) Guscio sferico

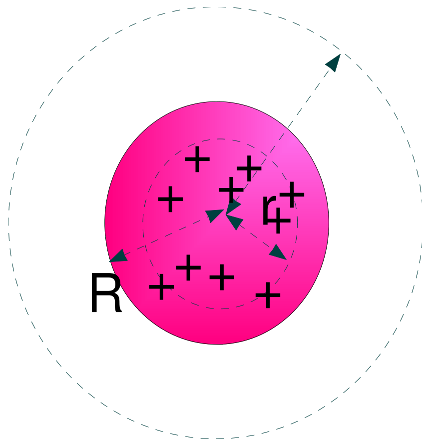


Simmetria sferica di ***E***

→Superficie gaussiana adatta: sfera concentrica

$r>R$: come carica puntiforme
$r<R$: campo nullo

4) Sfera carica



Simmetria sferica

Superficie gaussiana adatta: sfera

$$\int_r \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \int_r E\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}d\Sigma = E4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$r < R$:

$$q(r) = \rho V = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

$r > R$:

Come carica puntiforme

5) Piano carico

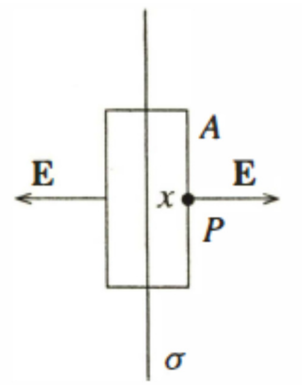
Simmetria planare, densita' superficiale σ

Campo $\perp$ piano per simmetria

→Superficie gaussiana adatta: cilindro attraverso la superficie

Area basi A

Flusso solo attraverso le basi



$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} d\Sigma = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & x > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & x < 0 \end{cases}$$

Campo *discontinuo* nell'attraversare il piano

Origine delle discontinuita':

Proprieta' generale di $\boldsymbol{E}$ nell'attraversare una superficie carica

Componente normale: discontinua

Componente trasversale: continua

Linee di forza:

Rappresentazione grafica dell’andamento del campo elettrico

Linee di forza: dirette in ogni punto lungo la direzione di E

Infinite

Per ogni punto una sola

Densita’ prop. a intensita’ E

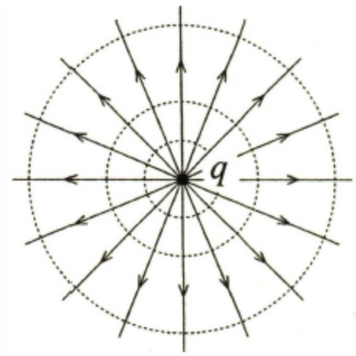
Da + a -, anche da $-\infty$ e a $+\infty$

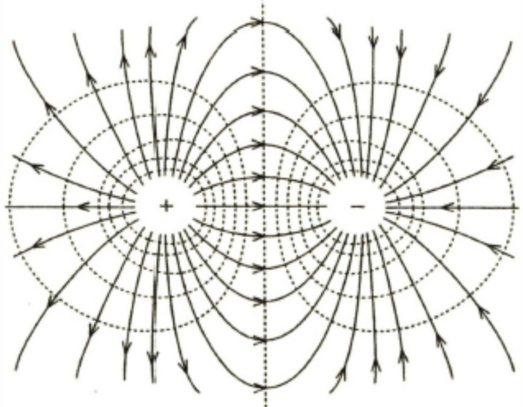
Mai chiuse

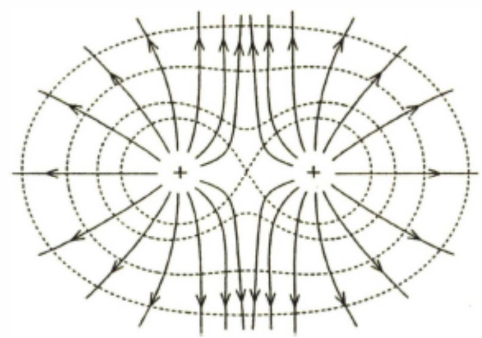
Superficie equipotenziali:

Ortogonali alle linee di forza

Luogo dei punti in cui ϕ ha valore prefissato


q


+
−


+
+

Origine delle discontinuita':

Proprieta' generale di $\boldsymbol{E}$ nell'attraversare una superficie carica

Componente normale: discontinua

Componente trasversale: continua

Superficie carica Σ con densita' sup. σ

Teo. di Gauss: $\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Sup. gaussiana: cilindro con altezza $\to 0$: Solo flusso attraverso le basi

$\to \left[E_{\perp}(P_2) - E_{\perp}(P_1) \right] dA = \frac{\sigma dA}{\varepsilon_0}$

$\to \Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\quad E_{\perp}$ discontinua

$\boldsymbol{E}$ irrotazionale: $\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$

Percorso rettangolare che attraversa Σ con lati corti $\to 0$

$\to \left[E_{\parallel}(P_2) - E_{\parallel}(P_1) \right] dl = 0$

$\to \Delta E_{\parallel} = 0$ $\quad E_{\parallel}$ continua