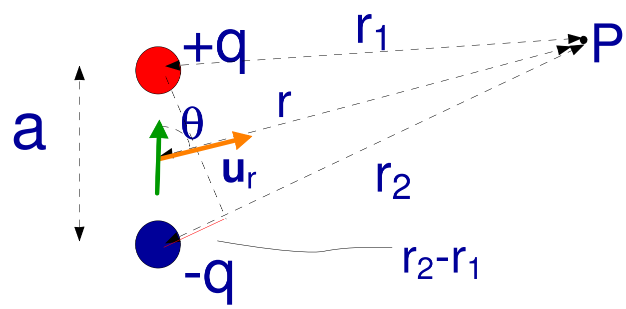
Dipolo elettrico

Cariche uguali e opposte, $+q$ e $-q$, a distanza d:

Carica totale $=0$

Potenziale totale non identicamente nullo

Infatti:



$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

Se $r \gg a$

$$\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \simeq \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

$$\rightarrow V(P) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

$\mathbf{p} = q\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ diretto da -q a +q

$$\rightarrow V(P) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\mathbf{p}|\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_r}{r^2}$$

Osservazioni:

Andamento $\sim \frac{1}{r^2}$

Dipendenza dal prodotto $q\mathbf{d} = \mathbf{p}$

Simmetria cilindrica attorno alla direzione di $\mathbf{p}$

Dipendenza da θ

Campo elettrostatico:

(per una derivazione dettagliata v. nota aggiuntiva)

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$\rightarrow E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3r^2\cos^2\theta}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\right)$$

Con lo stesso procedimento:

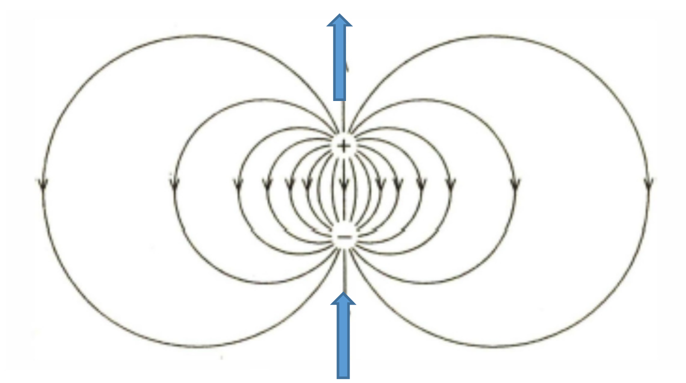
$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3r\cos\theta r\sin\theta\cos\varphi}{r^5} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r^3}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos\theta\sin\theta\sin\varphi}{r^3}$$

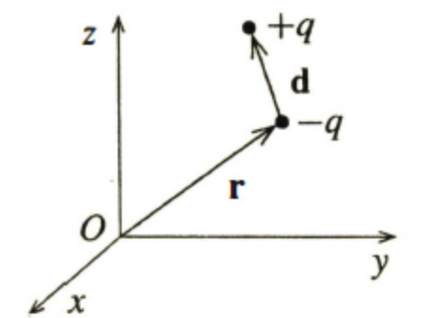
$$\rightarrow E_\perp = \left(E_x{}^2 + E_y{}^2\right)^{1/2} = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

espressione valida per $r >> a$.

Andamento a tutte le distanze:



Dipolo immerso in un campo esterno:



En. potenziale del dipolo:

$U = q\phi(\mathbf{r}) - q\phi(\mathbf{r}+\mathbf{d})$, 2 cariche opposte in posizioni diverse

Se $d \ll r$:

$\phi(\mathbf{r}+\mathbf{d}) \simeq \phi(\mathbf{r}) + \nabla\phi\cdot\mathbf{d}$, sviluppo in serie di Taylor al I termine

Effettivamente:

$\nabla\phi\cdot\mathbf{d} = \frac{\partial\phi}{\partial x}d_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}d_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}d_z$, incremento di ϕ fra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}+\mathbf{d}$

$\rightarrow \Delta\phi = \phi(\mathbf{r}+\mathbf{d}) - \phi(\mathbf{r}) \simeq \nabla\phi\cdot\mathbf{d} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$

$\rightarrow U = q\Delta\phi = -q\mathbf{E}\cdot\mathbf{d} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{p}$

C. elettrico preso in un solo punto: dipolo $\sim$ puntiforme

Forza agente sul dipolo:

$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, simili per x e y

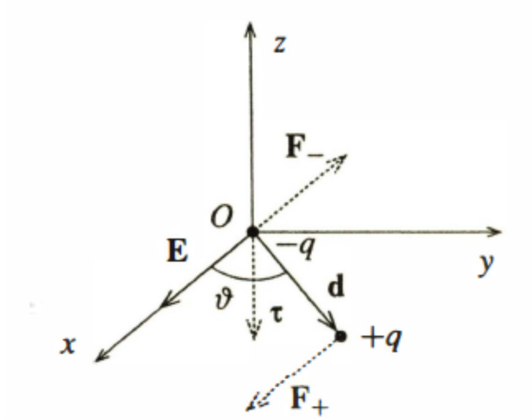
$\rightarrow F_x = -\frac{\partial}{\partial x}(-\mathbf{E}\cdot\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x p_x + E_y p_y + E_z p_z\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x}p_x + \frac{\partial E_y}{\partial x}p_y + \frac{\partial E_z}{\partial x}p_z$

$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial y}$ der. II miste

$\rightarrow F_x = \mathbf{p}\cdot\nabla E_x$, simile per F_y, F_z

$\rightarrow \mathbf{F} = \left(\mathbf{p}\cdot\nabla E_x, \mathbf{p}\cdot\nabla E_y, \mathbf{p}\cdot\nabla E_z\right)$

$\rightarrow \mathbf{F} = 0$ in un c. uniforme



Mom. meccanico agente sul dipolo:

$\tau_z d\theta = -dU$

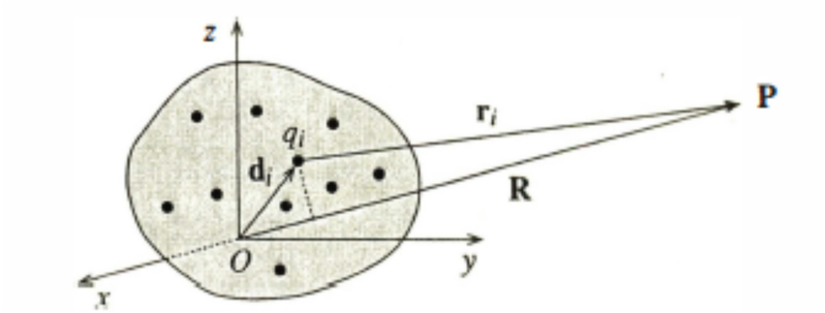
$\rightarrow \tau_z = -\frac{dU}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = -\frac{d}{d\theta}(-pE\cos\theta) = -pE\sin\theta$

$\rightarrow$ Segno$-$: $\boldsymbol{\tau}$ tende ad allineare $\mathbf{p}$ a $\mathbf{E}$

$\rightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$

Presente anche in c. uniforme

App. di dipolo



Sistema di cariche puntiformi in una regione spaziale finita

$\mathbf{d}_i$ posizione carica i-esima

$\mathbf{R}$ posizione punto di osservazione P

$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} - \mathbf{d}_i$ posizione di P riferita a carica i-esima

Potenziale nel punto P:

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$R \gg d_i \to r_i \approx R$$

$\phi(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},\ \ Q = \sum q_i$: limite coulombiano

$Q = 0$: approssimazione $r_i \approx R$ insoddisfacente

$\to r_i \approx R - \mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R$ approssimazione migliore

$$\to \frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R - \mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R} = \frac{1}{R}\frac{1}{1 - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R}} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R}\right)$$

$$\to \phi(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R}\left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \sum_i \frac{q_i \mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R^2}\right)$$

$$\to \phi(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_R}{R^2} \cdot \underbrace{\sum_i \mathbf{p}_i}_{\mathbf{p}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_R \cdot \mathbf{p}}{R^2}\right)$$

Generalizzazione a distribuzioni continue immediata

Definizione di mom.di dipolo elettrico di una distribuzione di carica:
dipende da scelta origine
Indipendente se $Q = 0$:
Con nuova origine O'

$$\mathbf{p}' = \sum_i q_i \mathbf{d}_i{}' = \sum_i q_i \mathbf{d}_i + OO'Q = \mathbf{p} + OO'Q = \mathbf{p} \text{ se } Q = 0$$

Separando i contributi $+vi$ da quelli $-vi$:

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = \sum_i q_i^+ \mathbf{d}_i - \sum_i \left|q_i^-\right| \mathbf{d}_i$$

Centri carica $+va$ e $-va$:

$$\mathbf{d}^+ = \frac{\sum_i q_i^+ \mathbf{d}_i}{\sum_i q_i^+}, \mathbf{d}^- = \frac{\sum_i \left|q_i^-\right| \mathbf{d}_i}{\sum_i \left|q_i^-\right|}$$

Per un sistema neutro:

$$\sum_i q_i^+ = \sum_i \left|q_i^-\right| = Q$$

$\rightarrow \mathbf{p} = Q\left(\mathbf{d}^+ - \mathbf{d}^-\right) = Q\boldsymbol{\delta},$ interpretazione mom.di dipolo totale