Conduttore isolato, lontano da altri conduttori

Carica $Q \rightarrow$ Potenziale $\phi_0 \propto Q$

Infatti:

$\nabla^2 \phi = 0$

$\begin{cases} \phi = \phi_0 & \text{sul conduttore} \\ \phi = 0 & \text{all'}\infty \end{cases}$

$\mathbf{E} = -\nabla\phi \parallel \hat{\mathbf{n}}, \quad \perp$ superficie

$\rightarrow \sigma = E\varepsilon_0$

$\rightarrow Q = \int_\Sigma \sigma d\Sigma = \int_\Sigma E\varepsilon_0 d\Sigma = -\int_\Sigma \varepsilon_0 \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$

Eq. di Laplace lineare $\rightarrow$

ϕ soluzione $\rightarrow \lambda\phi$ soluzione, λ costante

$\phi \rightarrow \lambda\phi \quad \Rightarrow \quad Q \rightarrow \lambda Q$

Infatti:

$Q = -\int_\Sigma \varepsilon_0 \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma \rightarrow -\int_\Sigma \varepsilon_0 \nabla(\lambda\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = -\lambda\int_\Sigma \varepsilon_0 \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \lambda Q$

$\rightarrow Q \propto \phi_0 = C\phi_0$ per ogni conduttore isolato

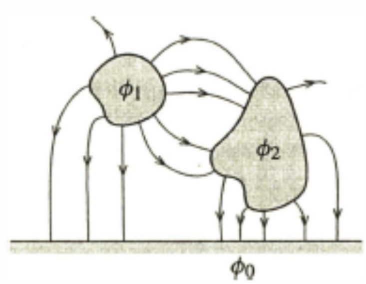
C capacita' del conduttore isolato

Conduttore isolato non realistico:

normalmente presenza di altri conduttori

$\rightarrow$ Induzione elettrostatica modifica tutti i potenziali

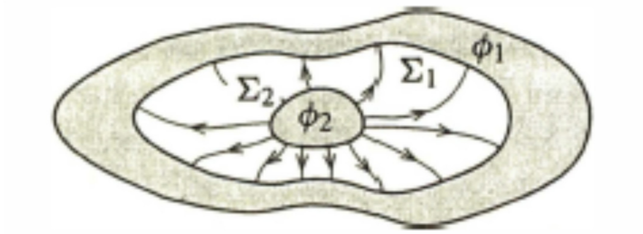
$\rightarrow Q$ non e' $\propto \phi$



Se fra due conduttori carichi tutte le linee di forza vanno dall'uno all'altro:

Induzione completa$\rightarrow$ Q_1=Q=-Q_2

Esempio frequente: Conduttore cavo che contiene un altro conduttore



Sistema con induzione completa: Condensatore

Diff.di potenziale fra i 2 conduttori $\propto Q$

$\phi(x,y,z)$ da eq. di Laplace

Cond. al contorno:

$$\begin{cases}\phi=\phi_1 \text{ su } \Sigma_1 \\ \phi=\phi_2 \text{ su } \Sigma_2\end{cases} \rightarrow \mathbf{E}=-\nabla\phi \rightarrow \begin{cases}\mathbf{E}_1 \text{ su } \Sigma_1 \\ \mathbf{E}_2 \text{ su } \Sigma_2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sigma_1=\varepsilon_0 E_1 \text{ su } \Sigma_1 \\ \sigma_2=\varepsilon_0 E_2 \text{ su } \Sigma_2\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_1 = Q = \int_{\Sigma_1} \sigma_1 d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_1} \varepsilon_0 \nabla\phi d\Sigma_1 \rightarrow \lambda \int_{\Sigma_1} \varepsilon_0 \nabla\phi d\Sigma_1 = \lambda Q \\ Q_2 = -Q_1 = -Q = \int_{\Sigma_2} \sigma_2 d\Sigma_2 \rightarrow -\lambda Q \end{cases}$$

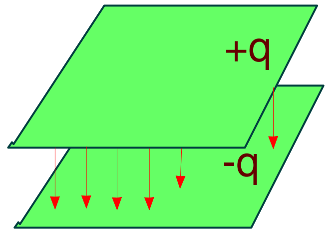
$$\rightarrow Q \propto \phi_1, -Q \propto \phi_2$$

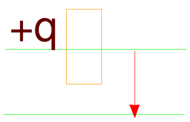
$$\rightarrow Q \propto \phi_1 - \phi_2 = C(\phi_1-\phi_2),\ C \text{ capacita' del condensatore}$$

Unita' di misura: $1\ F = 1\ C/V$

Calcoli di capacita'

Condensatore piano





Sup. gaussiana

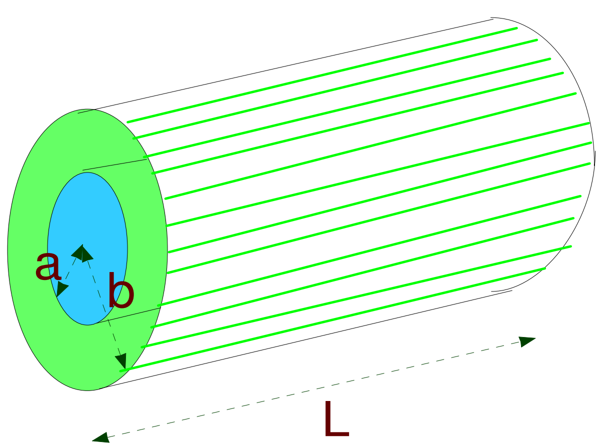
$$\sigma = \frac{q}{A}$$

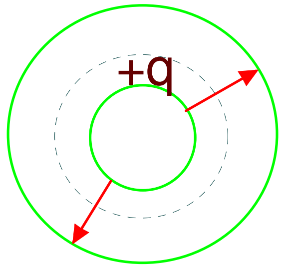
$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{\rho \Delta S}{\varepsilon_0} = E\Delta S \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^d E dz = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{V} = \varepsilon_0 \frac{\sigma A}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Condensatore cilindrico



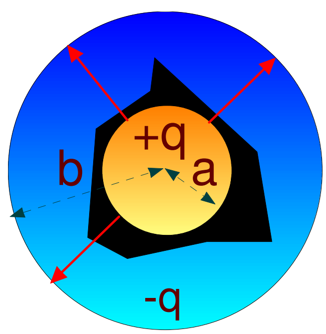


$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi r L E = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0}$$

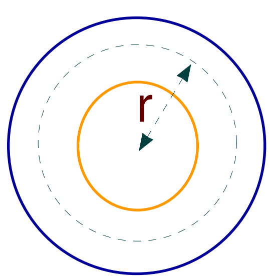
$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Condensatore sferico



Sup. gaussiana:



$$\Phi(E) = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$V = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

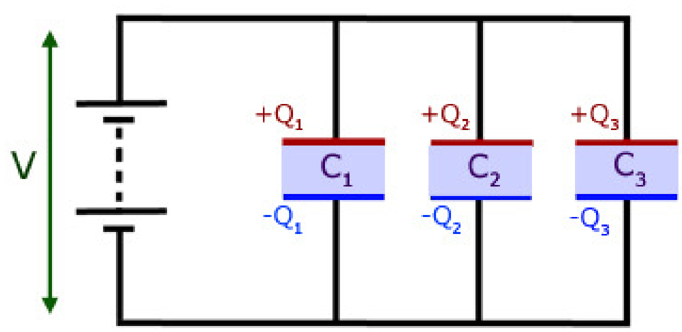
$$\rightarrow C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Condensatori in parallelo:

Stessa differenza di potenziale per i 2

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = C_1 V \\ q_2 = C_2 V \end{matrix}\right\} \rightarrow Q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$$

$$\rightarrow C = C_1 + C_2$$



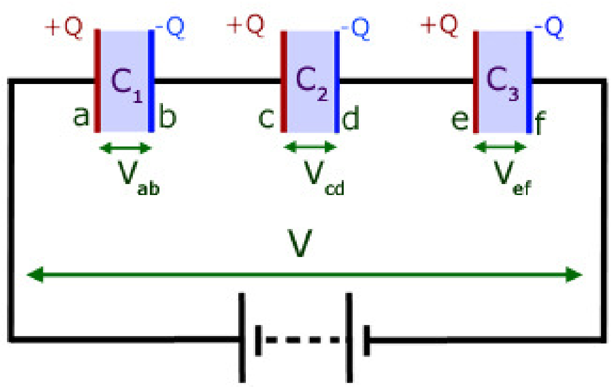
Condensatori in serie:

Stessa carica sui 2

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1 = \dfrac{q}{C_1} \\ \\ V_2 = \dfrac{q}{C_2} \end{array}\right\} \rightarrow V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{q}{V} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

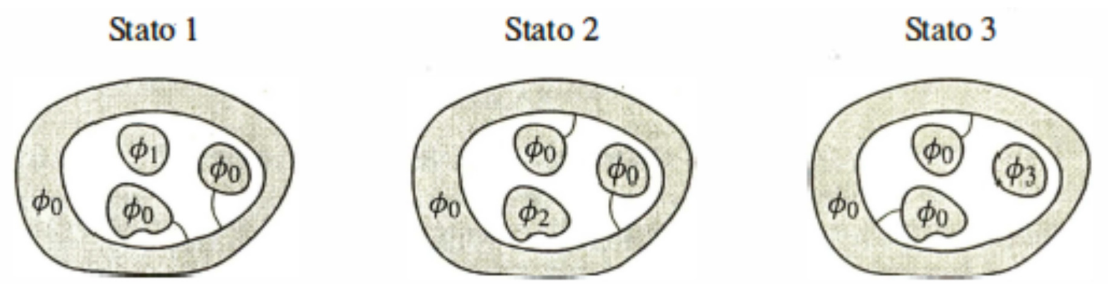


Estensione a *n* condensatori in parallelo o in serie

Generalizzazione del concetto di condensatore:

Sistemi a piu' conduttori

Es 3 conduttori entro un conduttore cavo a potenziale ϕ_0: riferimento



Relazioni fra cariche e potenziali: Si trovano immaginando diverse situazioni limite, in cui 2 dei 3 conduttori sono collegati a 0

Stato 1: Sistema equivalente a un condensatore:

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = C_{11}(\phi_1 - \phi_0) \\
\rightarrow &Q_2 = C_{21}(\phi_1 - \phi_0) \\
&Q_3 = C_{31}(\phi_1 - \phi_0)
\end{aligned}
$$

Stato 2 e stato 3:

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = C_{12}(\phi_2 - \phi_0) \\
\rightarrow &Q_2 = C_{22}(\phi_2 - \phi_0) \\
&Q_3 = C_{32}(\phi_2 - \phi_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = C_{13}(\phi_3 - \phi_0) \\
\rightarrow &Q_2 = C_{23}(\phi_3 - \phi_0) \\
&Q_3 = C_{33}(\phi_3 - \phi_0)
\end{aligned}
$$

C_{ij} matrice dei coefficienti di capacita'

Stato generico:

Si trova come combinazione lineare dei 3 stati precedenti

($\leftarrow$Linearita' eq. di Laplace):

$$Q_1 = C_{11}(\phi_1 - \phi_0) + C_{12}(\phi_2 - \phi_0) + C_{13}(\phi_3 - \phi_0)$$
$$Q_2 = C_{21}(\phi_1 - \phi_0) + C_{22}(\phi_2 - \phi_0) + C_{23}(\phi_3 - \phi_0)$$
$$Q_3 = C_{31}(\phi_1 - \phi_0) + C_{32}(\phi_2 - \phi_0) + C_{33}(\phi_3 - \phi_0)$$

Riassumendo:

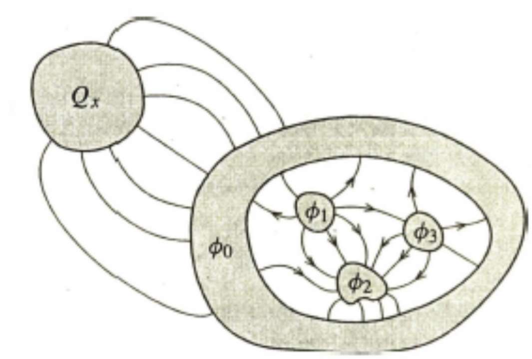
1 conduttore: Capacita'

2 conduttori (induzione completa): Capacita'

>2 conduttori: Matrice delle capacita'

Schermo elettrostatico e ambiguita' del potenziale:

Come prima, 3 conduttori carichi entro un conduttore cavo (schermo) tenuto a potenziale ϕ_0



Se si rimane in condizioni statiche:
ogni variazione all'esterno dello schermo non influenza
lo stato dei corpi carichi all'interno, e viceversa
Infatti:

La carica sulla superficie interna dello schermo non varia:
$Q_{\text{int}} = -\sum_i Q_i$

Caso di un solo conduttore interno:
$\rightarrow \phi_1 - \phi_0 \propto Q_{\text{int}} =$ cost
$\rightarrow$ Se varia ϕ_0 varia ϕ_1 della stessa entita'

Caso di piu' conduttori:
$Q_i =$ comb. lineare delle diff. di pot. $\phi_i - \phi_0 =$ cost
$\rightarrow \phi_i - \phi_0 =$ cost

$\rightarrow$ Azione di *schermo elettrostatico :*
In presenza di perturbazioni esterne (es corpo Q_x)
la sola variazione possibile e' il pot. dei corpi interni
di una quantita' costante uguale per tutti
$\rightarrow$ Il c. elettrico rimane inalterato

D'altra parte, spostamenti dei corpi interni o delle loro cariche
non producono effetti fisici all'esterno dello schermo

Manifestazione in elettrostatica di una proprieta' matematica
delle leggi dell'elettromagnetismo:
Invarianza rispetto a trasformazioni di gauge