Problema generale dell'elettrostatica:
Trovare ϕ (e quindi $\mathbf{E}$) in una regione spaziale,
nota la distribuzione di carica

Uso degli operatori differenziali:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla\cdot(-\nabla\phi) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$\rightarrow \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ eq.di Poisson

Sol. generale eq. di Poisson:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{volume}\frac{\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'$$

Spesso problema riformulato come:
Trovare ϕ (e quindi $\mathbf{E}$) in una regione spaziale, note la forma, la posizione e la carica (o il potenziale) dei conduttori presenti

Riformulazione necessaria perche' in presenza di conduttori
la densita' di carica non e' nota a priori ($\leftarrow$ Induzione elettrostatica).

Escludendo le superficie dei conduttori, nelle regioni dove $\rho = 0$:
$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ $\mathbf{E}$ campo solenoidale, privo di sorgenti
$\rightarrow \nabla^2\phi = 0$ eq. di Laplace

Eq. di Laplace: Eq. differenziale alle derivate parziali, di tipo ellittico
Noto il valore di φ, o $\mathbf{E}$, sulla frontiera della regione spaziale considerata
sotto condizioni 'poco' restrittive:

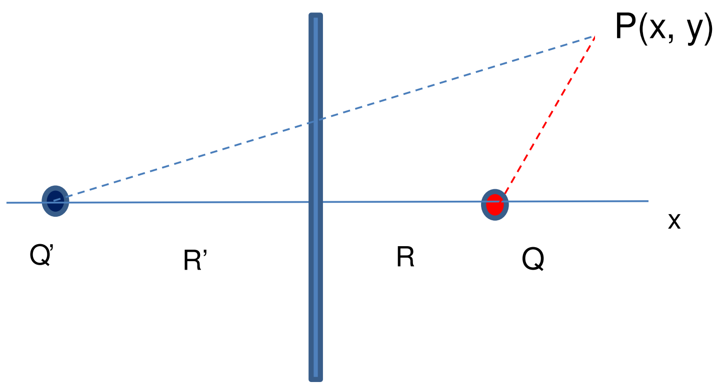
Teo. di esistenza e unicita' delle soluzioni

Base del metodo delle immagini, utile nei problemi
con cariche puntiformi e corpi conduttori

Metodo delle (cariche) immagini:
Sostituzione del conduttore con insieme di cariche puntiformi posizionate fuori dalla regione in cui si determina il potenziale, e tali da produrre una superficie equipotenziale coincidente con quella del conduttore stesso

Infatti: Teo. di esistenza e unicita' $\rightarrow$
Pot. generato dalle cariche immagini + cariche vere
=
Pot. del problema originario, *fuori dal conduttore*

Es Carica puntiforme sopra piano conduttore



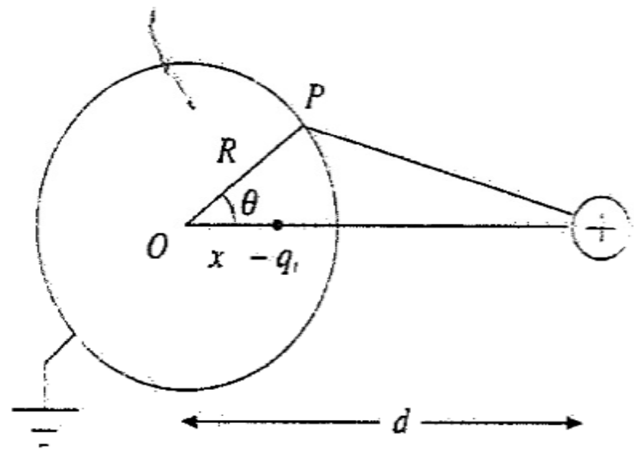
$$\phi(x,y,z)=\frac{Q}{\left[(x-R)^2+y^2\right]^{1/2}}+\frac{Q'}{\left[(x+R')^2+y^2\right]^{1/2}}$$

$$\rightarrow \phi(0,y,z)=\frac{Q}{\left[R^2+y^2\right]^{1/2}}+\frac{Q'}{\left[R'^2+y^2\right]^{1/2}}=0\rightarrow\begin{cases}Q=-Q'\\ R=R'\end{cases}$$ OK

$\rightarrow$ Unica soluzione!

$$\rightarrow \phi(x,y,z)=Q\left[\frac{1}{\left[(x-R)^2+y^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[(x+R)^2+y^2\right]^{1/2}}\right]$$

Es: Carica puntiforme e sfera conduttrice a $\phi = 0$



q su asse x a distanza d dal centro della sfera

$$\left.\begin{array}{l} q_{imm} = -yq \\ q_{imm} \text{ su asse } x \text{ a distanza } x \text{ dal centro della sfera} \end{array}\right\} \rightarrow \phi(P) = 0 \text{ se } P \text{ sulla sfera}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(d^2+R^2-2dR\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{yq}{\left(x^2+R^2-2xR\cos\theta\right)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\rightarrow y^2\left(d^2+R^2-2dR\cos\theta\right) = x^2+R^2-2xR\cos\theta$$

Identita' dei polinomi:

$$\rightarrow \left.\begin{array}{c} y^2\left(d^2+R^2\right) = x^2+R^2 \\ -2y^2 dR\cos\theta = -2xR\cos\theta \end{array}\right\} \rightarrow y^2 = \frac{x}{d} \rightarrow \frac{x^2}{d^2}\left(d^2+R^2\right) = x^2+R^2$$

$$\rightarrow x^2\left(d^2+R^2\right) = d^2\left(x^2+R^2\right) \rightarrow x = \begin{cases} d \\ \dfrac{R^2}{d} \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{R}{d} \end{cases}$$

I sol:banale $q_i = -q$,coincidente con $q \rightarrow \phi \equiv 0$ in tutti i punti

II sol: $q_i = -\dfrac{R}{d}q, \quad x_i = \dfrac{R^2}{d}$

$$\rightarrow \phi(r,\theta,\varphi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(d^2+r^2-2dr\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\dfrac{R^4}{d^2}+r^2-2r\dfrac{R}{d}\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

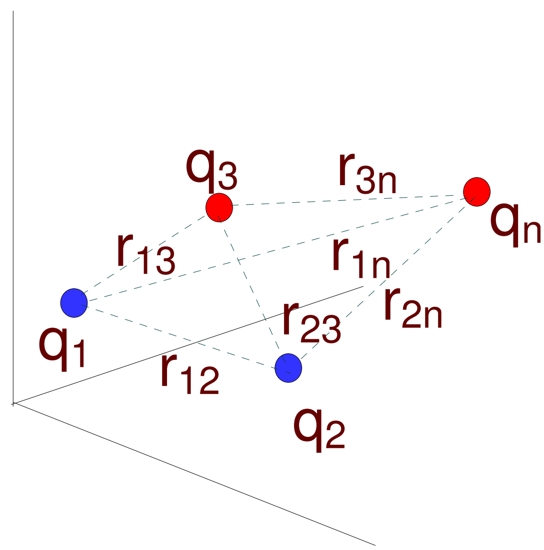
En. potenziale elettrostatica per una carica puntiforme q
nel campo di una carica puntiforme q_0 a distanza r

$$U(r) = q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C$$

C arbitraria: scelta $= 0$

$$\rightarrow U(r) = q\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Lettura equivalente:
En. potenziale elettrostatica per una carica puntiforme q_0
nel campo di una carica puntiforme q



En. potenziale di un insieme di cariche:
En. pot di j nel campo di i:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{ij}}q_j$$

Simmetricamente:

$$U_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ji}}q_i$$

En. pot. effettiva della coppia:

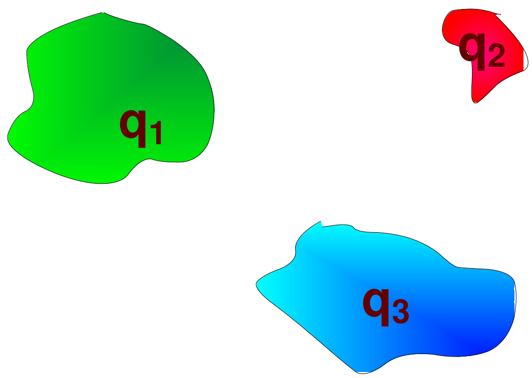
$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Considerando N cariche:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\mathbf{r}_i)$$

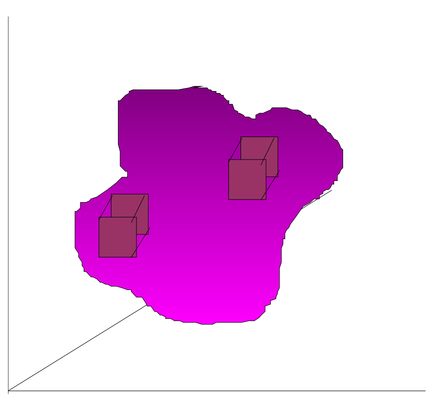
Per un insieme di conduttori:



$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i$$

Distribuzione continua di carica:

Suddivisione ideale del volume carico in cellette



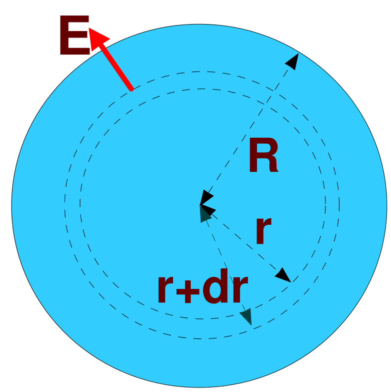
$\Delta q_i = \rho_i \Delta v_i$ carica della celletta $i-$esima

$$\rightarrow U \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta q_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\Delta q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta q_i\phi_i$$

$$\rightarrow U(x,y,z) = \int_V \rho(x',y',z')\phi(x',y',z')\,dx'dy'dz'$$

U : lavoro speso per assemblare la distribuzione finale da elementi infinitesimi, inizialmente a distanza infinita

Esempio: Distribuzione sferica di carica



$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}$$

Teo. di Gauss:

$r < R$:

$$\Phi = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$r > R$:

$$\Phi = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_{r}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_{r}^{\infty} E dr$$

$$\rightarrow \phi(r) = \int_{r}^{R} E dr + \int_{r}^{\infty} E dr = \int_{r}^{R} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$\rightarrow \phi(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right)$$

En. potenziale:

$$U = \frac{1}{2}\int_{V} \rho\phi dV = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_{V}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) dV$$

Coordinate sferiche:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_{V}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_{0}^{R}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) r^2 dr \iint_{\Delta\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{3\varepsilon_0} 4\pi\left(\frac{3}{2}R^2\frac{R^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{R^5}{5}\right) = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5$$

Es.: En. elettrostatica in un condensatore sferico, sfere a potenziale fisso

$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ fra le armature

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$$\rightarrow U = \int_V u_E dV = \int_V \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} dV = \int_V \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_V \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} r^2 dr d\Omega$$

$$\rightarrow U = 4\pi \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r^4} r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{R_A}^{R_B} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

Es.: Sfere cariche lontane l'una dall'altra

$$U_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ V_2 &= \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} \end{aligned}\right\}, \quad d \gg R_1, R_2$$

$$\rightarrow U_e = \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) + \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Es.: Raggio classico dell'elettrone

$$U_e = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2 \rightarrow R = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \sim 1.710^{-15}\ m$$

En. spesa per caricare un condensatore:
Trasporto di carica da un'armatura all'altra
Sottrazione di carica +va da armatura n. 1 $\rightarrow$ Accumulo di carica $-$va
Aggiunta di carica +va ad armatura n. 2 $\rightarrow$ Accumulo di carica +va
$\rightarrow$ Comparsa di una ddp fra le armature

Ad un istante qualsiasi durante il processo: $ddp = V' = \frac{q'}{C}$

Armatura n. 1: $-dq'$
Armatura n. 2: $+dq'$

$\rightarrow dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$ lavoro elementare

$\rightarrow W = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$

Lavoro totale = En . potenziale elettrostatica, immagazzinata...

$\begin{cases} \text{Fra le cariche +ve e } -\text{ve sulle armature...} \\ \text{...oppure...} \\ \text{...Nello spazio fra le armature, dove c'e' un c. elettrico} \end{cases}$

Descrizioni equivalenti in elettrostatica, non in elettrodinamica

Bilancio energetico e forze in elettrostatica

1) Condensatore piano a q costante:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} h$$

Variazione della distanza:

$$dU_e = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} dh$$

$$dW = -dU_e = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} dh = F dh$$

$$\rightarrow F = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S^2} S = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S$$

Generalizzazione 3D:

$$F = -\frac{dU_e}{dh} \rightarrow \mathbf{F} = -\nabla U_e$$

2) Condensatore piano a V costante:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} h$$

Variazione della distanza:

$$dU_e = d\left(\frac{1}{2} C V^2\right) = \frac{1}{2} V^2 dC$$

$$dC = d\left(\frac{\varepsilon_0 S}{h}\right) = -\frac{\varepsilon_0 S}{h^2} dh$$

$$\rightarrow dU_e = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2} dh$$

$$\rightarrow F = -\frac{dU_e}{dh} = -\left(-\frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2}\right) = +\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \ !$$

Come prima, ma col segno opposto: ???

Attenzione:
a V costante occorre collegare un generatore alle armature

$\rightarrow$ Durante lo spostamento la carica varia
$\rightarrow$ Movimento di cariche $\rightarrow$ Lavoro del generatore

$$dQ = VdC \rightarrow dW = -VdQ = -V^2 dC = -\left(-V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2} dh\right)$$

$$\rightarrow \frac{dW}{dh} = V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2}$$

Per F occorre la derivata rispetto allo spostamento
di *tutta* l'energia del sistema:

$$F = -\left(\frac{dU_e}{dh} + \frac{dW}{dh}\right) = -\left(-\frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2} + V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2}\right)$$

$$\rightarrow F = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \quad \text{OK}$$

Pressione elettrostatica:

$$p = \frac{|F|}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Risultato generale, dipende solo da E
Non dipende da distribuzione di carica ne' forma delle armature

Densita'di energia del c. elettrostatico:

1) Condensatore piano

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}V^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 Ad}{d^2}V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{Ad}_{\text{volume}} \underbrace{\frac{V^2}{d^2}}_{E^2}$$

$$\rightarrow u_E = \frac{U_E}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$ densita' volumetrica di energia elettrostatica

2) Caso generale

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \rho\phi dV$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow U_E = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{tutto lo spazio}} \left(\nabla^2\phi\right)\phi dV$$

Identita' vettoriale:

$$\phi\left(\nabla^2\phi\right) = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - (\nabla\phi)^2$$

$$\rightarrow U_E = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\nabla^2\phi\right)\phi dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{tutto lo spazio}} \nabla\cdot(\phi\mathbf{E})\, dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{tutto lo spazio}} \mathbf{E}^2 dV$$

I termine:

Integrazione su una sfera di raggio R, poi limite per $R \rightarrow \infty$

Teo. della divergenza:

$$\int_{V_R} \nabla\cdot(\phi\mathbf{E})\, dV = \int_{\Sigma_R} \phi\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

Distribuzione di carica entro un volume finito:

per $R \rightarrow \infty : \phi \propto \frac{1}{R}, E \propto \frac{1}{R^2}, \Sigma_R \propto R^2 \rightarrow \int_{\Sigma_R} \phi\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}} d\Sigma \propto \frac{1}{R}$

$$\rightarrow \lim_{R\rightarrow\infty} \int_{V_R} \nabla\cdot(\phi\mathbf{E})\, dV = 0$$

$\rightarrow$ Resta solo il II termine:

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{tutto lo spazio}} \mathbf{E}^2 dV$$

$$\rightarrow u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2$$ densita' volumetrica di energia elettrostatica