Dielettrici

Confrontati con i conduttori:

elettroni legati permanentemente agli atomi/molecole
non ci sono elettroni liberi
non ci puo' essere conduzione

Effetti elettrici: polarizzazione

Due tipi di atomi/molecole:

privi di momento di dipolo proprio (es. atomo di H)

con momento di dipolo proprio (es. molecola H_2O)

Osservazione su moto cariche:

Cariche microscopicamente in movimento (elettroni atomici),

macroscopicamente ferme (stati legati)

$\rightarrow$ no corrente

Costante dielettrica:

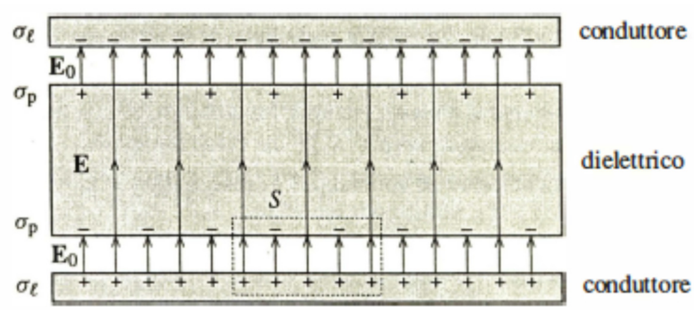
Condensatore piano caricato a tensione V_0

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow Q = C_0 V_0$$

Staccata la batteria ($\leftarrow$ a carica costante: $Q = \text{cost}$)

si inserisce una lastra dielettrica fra le armature

$$V_0 \rightarrow V < V_0 \quad V = \frac{V_0}{\kappa}, \kappa > 1$$ sempre



Nuova capacita':

$$Q = C_0 V_0 = CV$$

$$V_0 \rightarrow V = \frac{V_0}{\kappa} < V_0 \Rightarrow C_0 \rightarrow C = \kappa C_0 = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} > C_0$$ cap. aumentata

$\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ permittivita' del materiale

Altro simbolo e nome:

$\varepsilon_r = \kappa$ cost. dielettrica relativa, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ cost. dielettrica assoluta

Fra le armature:

Diff. di potenziale diminuita $\rightarrow$ C. elettrico diminuito

$$E_0 \rightarrow E = \frac{E_0}{\kappa}$$

Origine della diminuzione:

Teo. di Gauss, sup. gaussiana in figura

$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$, flusso attraverso sup. di base nel dielettrico

Altri contributi nulli, σ densita' sup. di carica totale

$\rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} < E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$ c. elettrico nel vuoto

$\rightarrow \sigma < \sigma_f \rightarrow \sigma = \sigma_f - \sigma_p$ presenza di cariche di polarizzazione

Origine cariche di polarizzazione:

a) Mom. di dipolo indotto

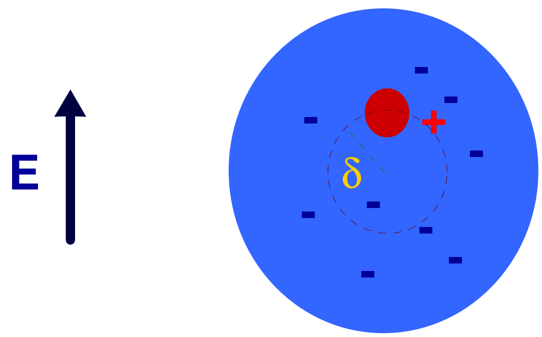
Modello atomico semplificato:

Carica +va puntiforme (nucleo)
Carica -va distribuita (elettroni)

Centri sovrapposti in assenza di c. esterno

In un campo esterno: spostamento relativo dei centri di carica

$\rightarrow$ Distorsione $\rightarrow$ Mom. di dipolo indotto



Campo nel punto in cui si trova il nucleo:

quello dovuto alla carica contenuta entro il raggio δ

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\delta)}{\delta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R^3}\delta$$

$$\rightarrow F = ZeE_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)^2}{R^3}\delta$$

Equilibrio:

$$ZeE_{\text{int}} = ZeE$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)^2}{R^3}\delta = ZeE \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R^3}\delta = E$$

$$\rightarrow \delta = 4\pi\varepsilon_0\frac{R^3}{Ze}E$$

C. esterno distorce leggermente la struttura atomica inducendo un momento di dipolo elettrico

$$p=(Ze)\delta=4\pi\varepsilon_0 R^3 E$$
$$p=\alpha E \quad \alpha \text{ polarizzabilita'}$$
$$\rightarrow \alpha=4\pi\varepsilon_0 R^3$$

Esempio: atomo di idrogeno

$$\alpha=4\pi\varepsilon_0 R^3$$
$$R=0.53 10^{-10} m$$
$$\rightarrow \alpha=12.56\ 8.82\ 10^{-12}\ 0.12\ 10^{-30}=1.3 10^{-41} Fm^2$$

Vettore polarizzazione: Mom. di dipolo indotto/volume

$|\mathbf{P}|=Np=Nq\delta,\ \mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$ $\quad N$ n. molecole/volume

$$\rightarrow \mathbf{P}=N4\pi\varepsilon_0 R^3\mathbf{E}=N\alpha\mathbf{E}$$

$\alpha=4\pi\varepsilon_0 R^3$ polarizzabilita' per deformazione della molecola

b) Mom. di dipolo permanente

Caso di atomi(raro)/molecole(frequente) dotati di mom. di dipolo proprio

In assenza di c. esterno:

Equilibrio statistico, nessuna direzione preferita per i dipoli

$\rightarrow$ Mom.di dipolo medio $=0$

In presenza di c. esterno:

Distribuzione statistica dell'angolo θ fra direzione dipolo $i-$esimo e $\mathbf{E}$:

$$\frac{dn}{d\theta}=n_0 e^{\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}}, \quad \text{da distribuzione di Boltzmann}$$

$$\rightarrow \frac{dn}{d\theta}\approx n_0\left(1+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right), \quad T\gg 0$$

Normalizzazione a unita' di volume:

$$\int_{\text{ang. solido}}\frac{dn}{d\theta}d\Omega=N\rightarrow\int_{\text{ang. solido}} n_0\left(1+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right)d\Omega=N$$

$$\rightarrow n_0 4\pi+n_0\frac{p_0 E}{kT}\int_{\text{ang. solido}}\cos\theta d\Omega=N\rightarrow n_0=\frac{N}{4\pi}$$

$$\rightarrow \frac{dn}{d\theta}\approx \frac{N}{4\pi}\left(1+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right), \quad T\gg 0$$

Vettore polarizzazione: Mom. di dipolo/unita' di volume

$$|\mathbf{P}|=\int_{\text{ang. solido}}\frac{N}{4\pi}\left(1+\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right)p_0\cos\theta d\Omega$$

$$\rightarrow |\mathbf{P}|=-\frac{N}{2}\int_{\text{ang. solido}} p_0\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\cos\theta d\left(\cos\theta\right)$$

$$=-\frac{N}{2}\frac{p_0^2 E}{kT}\int_{+1}^{-1}\cos^2\theta d\left(\cos\theta\right)=-\frac{N}{6}\frac{p_0^2 E}{kT}\cos^3\theta\Big|_{+1}^{-1}$$

$$\rightarrow \mathbf{P}=\frac{N}{3}\frac{p_0^2\mathbf{E}}{kT}$$

Vettore $\mathbf{P}$

Dielettrico lineare, isotropo:

$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, proporzionalita' + parallelismo

NB $\mathbf{E}$ campo *totale* agente sul dipolo $= \mathbf{E}_{ext} +$ effetto polarizzazione

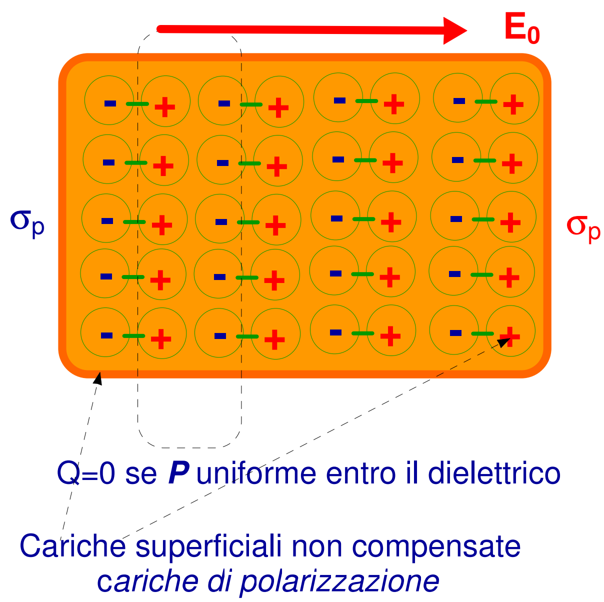
χ_e suscettivita' dielettrica

Dimensioni:

$[P] = [Q][L]\left[L^{-3}\right] = [Q]\left[L^{-2}\right] = [\sigma]$, $\quad [\chi_e]$ adimensionale

Polarizzazione uniforme:

Es caso dielettrico nel condensatore piano



$$\left|\sigma_p\right| = Nq\delta = |\mathbf{P}|$$

$$\rightarrow E = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} - \frac{|\mathbf{P}|}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E + \frac{|\mathbf{P}|}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$$

Assumendo

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\rightarrow E + \frac{\varepsilon_0 \chi_e E}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} \rightarrow E\left(1+\chi_e\right) = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} = E_0$$

$$\rightarrow \kappa \equiv \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

Polarizzazione non uniforme

Straterello di dielettrico nel c. esterno:

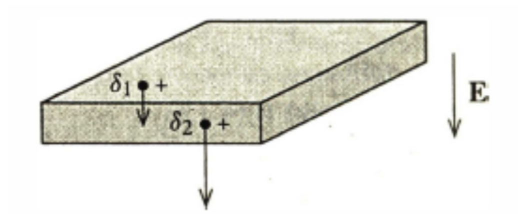
Cariche entro spessore δ da faccia n. 1 entrano

Cariche entro spessore δ da faccia n. 2 escono

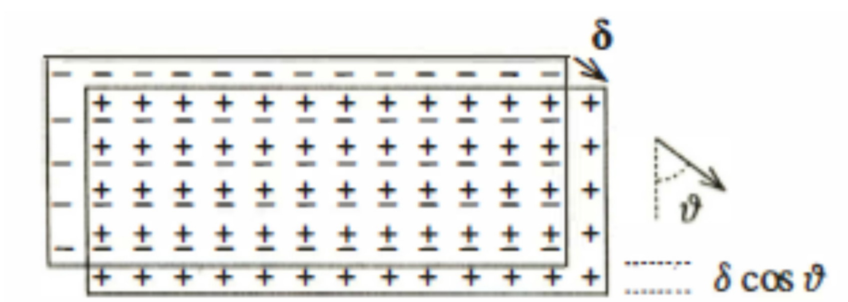
Se $\mathbf{P}$ uniforme $\rightarrow$ Bilancio in pareggio

Se $\mathbf{P}$ non uniforme $\rightarrow$ Variazione carica nello straterello

$\rightarrow$ Comparsa di cariche di volume

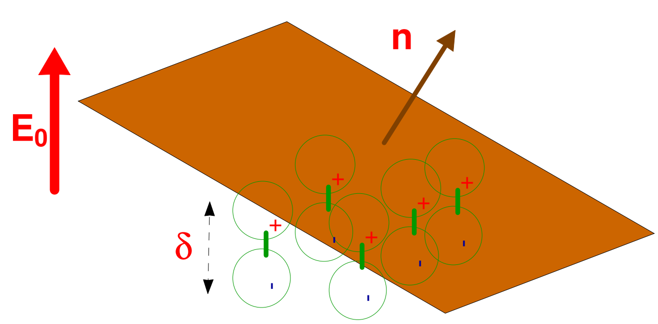


Effetto non ortogonalita' superficie - $\mathbf{E}$:

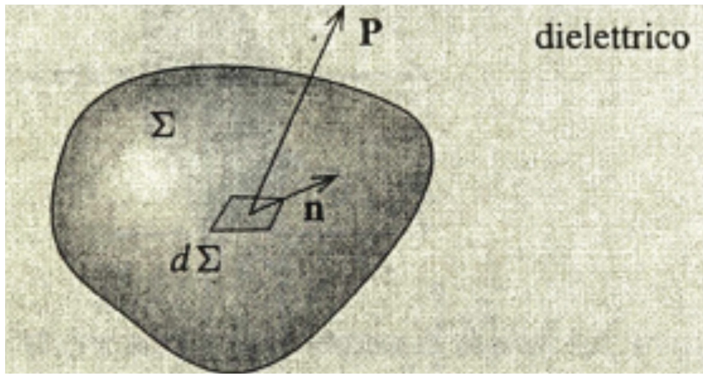


Spessore in cui compaiono cariche non compensate:

$\delta \cos\theta \rightarrow \sigma_P = Nq\delta\cos\theta = P\cos\theta = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$



Volume arbitrario V all'interno del dielettrico,
delimitato da superficie Σ:



Polarizzazione $\rightarrow$ Ingresso/Uscita di cariche da V
Carica elementare che attraversa l'elemento di superficie $d\Sigma$:
$dQ = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$

Carica totale in ingresso a V = –Carica totale che attraversa Σ
(segno – viene da versore normale a Σ diretto verso l'esterno)

$$\Delta Q = -\int_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \int_{V} \rho_P dV$$

Teo. della divergenza:

$$-\int_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = -\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{P} dV$$

$$\rightarrow \rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$\mathbf{P}$ uniforme, o anche solo solenoidale:
$\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \rightarrow \rho_P = 0$

I 3 vettori elettrici

Eq. elettrostatica:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{teo. di Gauss} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{irrotazionalita' di } \mathbf{E} \end{cases}$$

valide anche nei dielettrici, ma con

$$\rho = \rho_f + \rho_p$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$$

Definizione:

$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ vettore spostamento elettrico

$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ legato alle sole cariche libere

Assumendo:

$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ dielettrico lineare,isotropo

$\rightarrow \mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e\right) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$ rel. costitutiva

$$\rightarrow \nabla \cdot \left(\varepsilon_r \mathbf{E}\right) = \rho_f$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Se $\varepsilon_r =$ cost , dielettrico infinito (no disomogeneita')

$\rightarrow \nabla \times \left(\varepsilon_r \mathbf{E}\right) = 0$ dielettrico omogeneo

Eq. elettrostatica nel dielettrico:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\varepsilon_r \mathbf{E}\right) = \rho_f \\ \nabla \times \left(\varepsilon_r \mathbf{E}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{cfr. eq. nel vuoto} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0 \end{cases}$$

Stesse equazioni $\rightarrow$ Stesse soluzioni

$\rightarrow \mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r}$ c. nel dielettrico

Per dielettrico lineare, isotropo, omogeneo e illimitato (!):

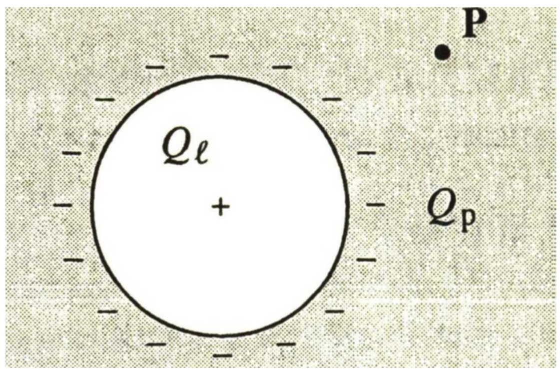
$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\mathbf{D}$$

$$\rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\mathbf{D} \right) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\nabla \cdot \mathbf{D}$$

In assenza di cariche libere:

$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \rightarrow \rho_p = 0$ assenza di cariche di volume

Esempio: sferetta conduttrice in fluido dielettrico



Carica libera $+$va Q_l su sferetta:

$\rightarrow$ Carica di superficie $-$va Q_p all'interfaccia sferetta/fluido

$\rightarrow$ In un punto qualsiasi del dielettrico:

C. elettrico uguale a quello di una carica puntiforme $Q_l + Q_p < Q_l$

Le cariche di polarizzazione *schermano l*a carica libera

$\rightarrow$ C. elettrico ridotto

Per campi statici: Variazione di E e D all’interfaccia fra 2 dielettrici

Flusso di $\mathbf{D}$:

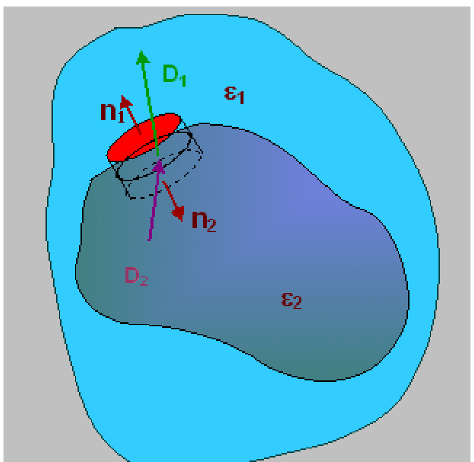
Superficie cilindrica attraverso l'interfaccia, $h \to 0$: Solo flusso attraverso le basi

$q_f = 0 \to \Phi = 0 \to \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$

Circuitazione di $\mathbf{E}$:

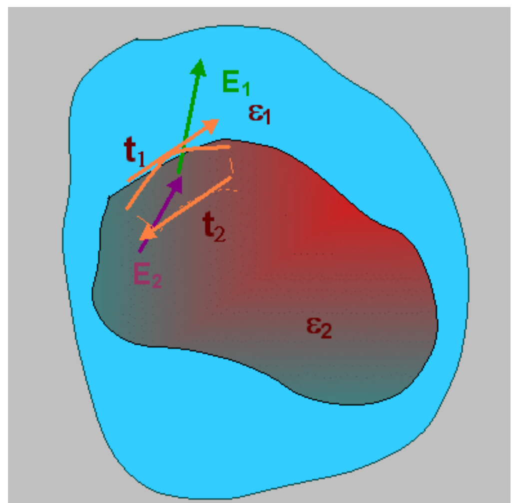
Percorso rettangolare attraverso l'interfaccia, $h \to 0$: Solo contributo dai lati lunghi

$\oint = 0 \to \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$



$\to \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$

La componente normale di **D** si conserva

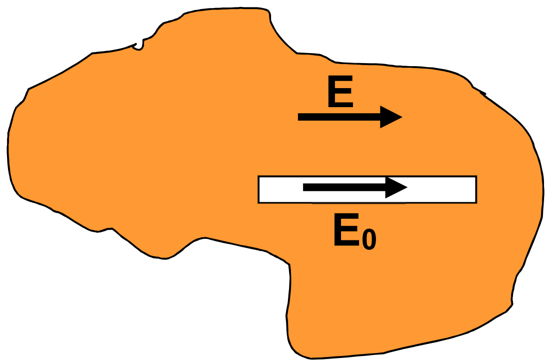


$\to \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$

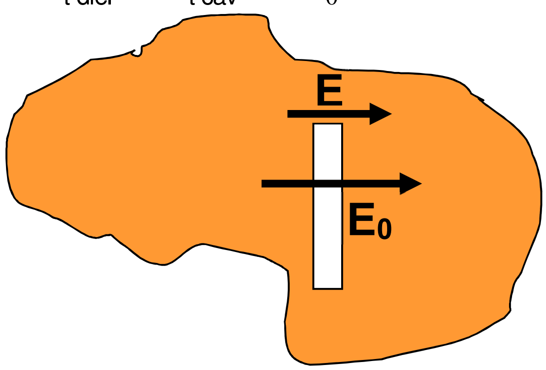
La componente tangenziale di **E** si conserva

Campo in una cavita' praticata nel dielettrico: **E₀**

Dipendono da forma e orientamento della cavita' rispetto a **E**



$$E_{\text{t diel}} = E_{\text{t cav}} \rightarrow \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$$



$$D_{\text{n diel}} = D_{\text{n cav}} \rightarrow \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$$
$$\rightarrow \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \rightarrow \varepsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{E}_0$$