Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

I – Onde nel vuoto e nei dielettrici

Indice

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$$

Non esistono cariche o correnti magnetiche

Cariche e correnti elettriche

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

8 equazioni differenziali alle derivate parziali del I ordine, accoppiate

Equazione delle onde

$$\nabla \times \left(\nabla \times \cdots = \nabla \left(\nabla \bullet \;\; \cdots \;\; - \Delta \cdots \right.\right.$$

Identita' vettoriale; applicata alla III e IV eq. di Maxwell
Tenuto conto delle prime due:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Equazioni delle onde→6 eq. differenziali alle derivate parziali, del II ordine, disaccoppiate

$$\rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad !!!$$

Soluzioni equazione delle onde

Caso unidimensionale

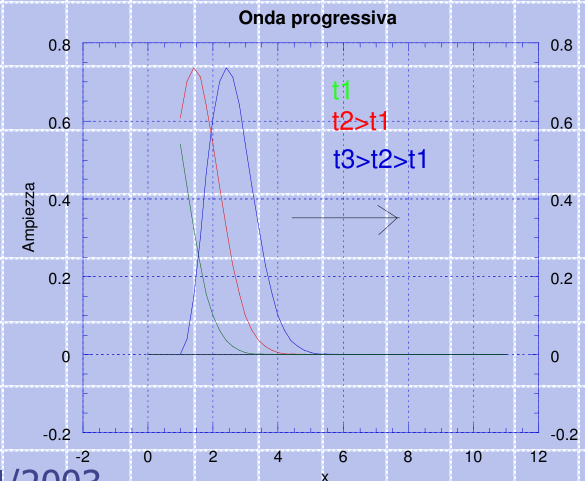
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad v = velocita'$$

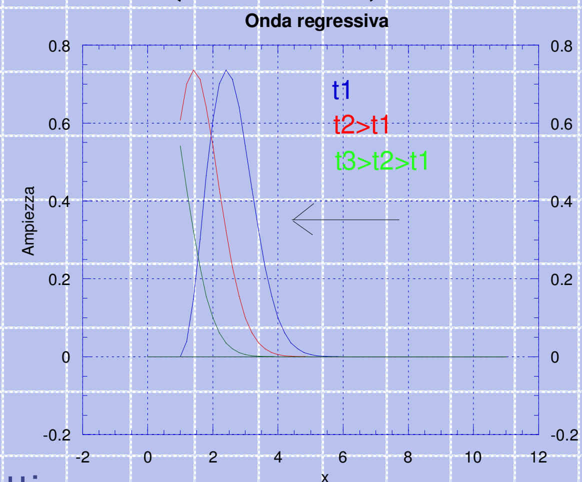
f=f(x,t) funzione di 2 variabili

Soluzione piu' generale

g, h funzioni qualsiasi

$$f = g(x - vt) \qquad + \qquad h(x + vt)$$





Onde armoniche

Soluzione particolare:

$$f(x,t) = A\cos\left[k\left(x - vt\right) + \delta\right]$$

Ampiezza Numero d'onda Fase

Relazioni fondamentali e definizioni:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi\nu$$

k: *frequenza spaziale*
ν: *frequenza temporale*

Onde progressive e regressive

$$f_P(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) \text{ progressiva}$$

$$f_R(x,t) = A\cos(kx + \omega t - \delta) \text{ regressiva}$$

Perche' il -?

$$f_P(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = A\cos(kx - (\omega t - \delta))$$

$\leftarrow$la fase si assegna per convenzione alla componente temporale dell'argomento, che cambia segno nel passare da un'onda progressiva a una regressiva. Allora:

$$f_R(x,t) = A\cos(kx + (\omega t - \delta)) = A\cos\left(-kx - (\omega t - \delta)\right)$$

$\rightarrow$ Per passare da o.progressiva a o.regressiva $k \rightarrow -k$

Uso degli esponenziali complessi

$$A\cos(kx-\omega t+\delta)=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t+\delta)}\right]$$

In luogo delle funzioni trigonometriche si usano le funzioni esponenziali complesse

Si sottintende sempre di prendere alla fine dei calcoli la parte reale del risultato

Formalismo utile per operazioni lineari, in cui ω non cambia.

Vantaggio: grande semplificazione dei calcoli!

$$A_1\cos(kx-\omega t+\delta_1)+A_2\cos(kx-\omega t+\delta_2)=A_3\cos(kx-\omega t+\delta_3)$$

$$\rightarrow \underbrace{A_1e^{i\delta_1}}_{\tilde{A}_1}e^{i(kx-\omega t)}+\underbrace{A_2e^{i\delta_2}}_{\tilde{A}_2}e^{i(kx-\omega t)}=\underbrace{A_3e^{i\delta_3}}_{\tilde{A}_3}e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\rightarrow \tilde{A}_1+\tilde{A}_2=\tilde{A}_3$$

$\rightarrow$Le ampiezze complesse si sommano

Teorema di Fourier

Qualsiasi onda si puo' esprimere come combinazione lineare di onde sinusoidali di diverse lunghezze d'onda. In generale:

$$\tilde{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

Occorrono anche le onde regressive (con k –vo) se si vuole poter comporre qualsiasi onda

→Ci si puo' limitare a studiare le proprieta' generali delle onde sinusoidali

Onde piane nello spazio vuoto

Caso particolare: *onda piana monocromatica*

propagazione nella direzione x
non dipendenza da (y,z)
k valore definito e unico

$$\tilde{\mathbf{E}}(r,t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(r,t) = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0}} e^{i(kx-\omega t)}$$

Nota: ogni soluzione delle eq. di Maxwell in assenza di cariche e correnti e' un'onda
*Non e' vero il contrario; infatti **E** e **B** soddisfano*

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$$

Proprieta' delle onde piane

1) Trasversalita' dei campi

$$\tilde{\mathbf{E}}(r,t)=\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}}e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\nabla\bullet\mathbf{E}=0\rightarrow\frac{\partial\tilde{E}_{0x}}{\partial x}=0$$ non dipendenza da (y,z)

$$\rightarrow ik\tilde{E}_{0x}e^{i(kx-\omega t)}=0\rightarrow\tilde{E}_{0x}=0$$

2) Ortogonalita' di **E**,**B**

$$\nabla\times\tilde{\mathbf{E}}=-\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}\rightarrow k\tilde{E}_{0y}=\omega\tilde{B}_{0z},\, k\tilde{E}_{0z}=-\omega\tilde{B}_{0y}$$

$$\rightarrow\tilde{\mathbf{B}}_0=\frac{k}{\omega}\left(\hat{\mathbf{x}}\times\tilde{\mathbf{E}}_0\right)\rightarrow B_0=\frac{k}{\omega}E_0=\frac{E_0}{c}$$

Onde piane in direzione generica

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$$

n, k: versori
polarizzazione
n. d'onda

Si noti: argomento reale $\rightarrow$ oscillazioni
argomento complesso $\rightarrow$ oscillazioni smorzate

Energia, quantita’ di moto

$$U=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)$$ $$\rightarrow U=\varepsilon_0 E^2$$	Densita’ di energia elettromagnetica $\leftarrow$*per un’onda piana*
$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$$ $$\rightarrow \mathbf{S}=cU\hat{\mathbf{k}}$$	Vettore di Poynting: flusso di energia elettromagnetica $\leftarrow$*per un’onda piana*
$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{S}}{c^2}$$ $$\rightarrow \mathbf{P}=\frac{U}{c}\hat{\mathbf{k}}$$	Flusso di quantita’ di moto $\leftarrow$*per un’onda piana*

Mezzi materiali

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

Relazioni costitutive, semiempiriche dal punto di vista macroscopico.
Permittivita' e permeabilita':

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \ , \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$\leftarrow$nell'ipotesi in cui ε, μ siano costanti, scalari (isotropia del mezzo)

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \equiv \frac{c}{n}$$

Onde nei mezzi materiali

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

Velocita' di propagazione

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Indice di rifrazione

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)$$

Densita' di energia

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$$

Vettore di Poyinting

Onde nei dielettrici

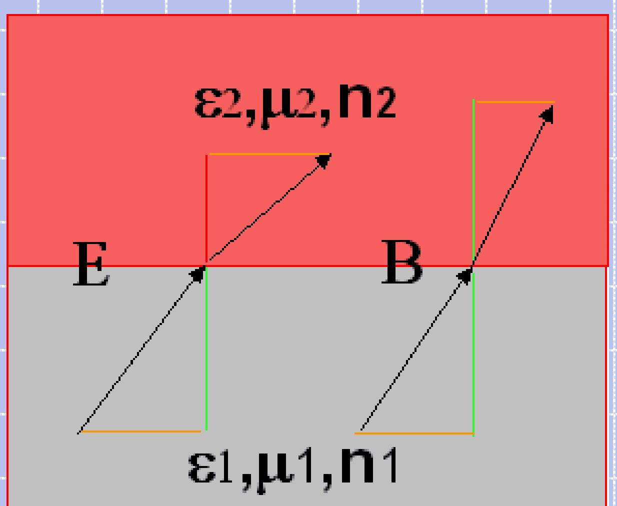
- Leggi delle riflessione e rifrazione
- Formule di Fresnel
- Riflessione totale
- Polarizzazione per riflessione

Condizioni al contorno

- Sulla frontiera fra due mezzi valgono sempre le relazioni:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \qquad \mathbf{E}_{1||} = \mathbf{E}_{2||}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \qquad \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1||} = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2||}$$



Le condizioni derivano da

$$\oint \mathbf{E}\bullet d\mathbf{l} = 0$$

$$\oiint \mathbf{D}\bullet d\mathbf{S} = 0$$

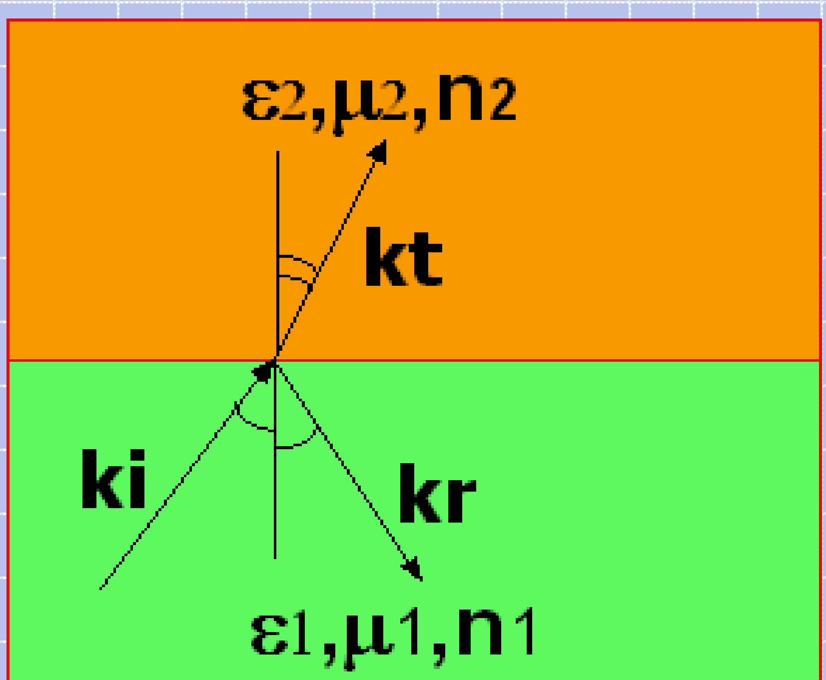
$$\oint \mathbf{H}\bullet d\mathbf{l} = 0$$

$$\oiint \mathbf{B}\bullet d\mathbf{S} = 0$$

applicate a linee e volumi chiusi che attraversano la superficie

Riflessione e trasmissione - I

Si applicano le condizioni al contorno alla situazione descritta in figura



Risultati

3 vettori d'onda complanari

$\theta_i = \theta_r$

$$\frac{\sin \vartheta_T}{\sin \vartheta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

Componenti:

$$\varepsilon_1 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0I}} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0R}} \right)_x = \varepsilon_2 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0T}} \right)_x$$

$$\left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0I}} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0R}} \right)_{y,z} = \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0T}} \right)_{y,z}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0I}} + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0R}} \right)_{y,z} = \frac{1}{\mu_2} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0T}} \right)_{y,z}$$

$$\left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0I}} + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0R}} \right)_x = \left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0T}} \right)_x$$

Riflessione e trasmissione - II

Le conseguenze sono diverse per i 2 casi

(i) Polarizzazione nel piano di incidenza

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa sono

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha+\beta}\tilde{E}_{0I};\ \alpha = \frac{\cos\vartheta_{\mathrm{T}}}{\cos\ \theta_{\mathrm{I}}},\ \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

(ii) Polarizzazione ortogonale al piano di incidenza

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa sono

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1+\alpha\beta}\tilde{E}_{0I};\ \alpha = \frac{\cos\vartheta_{\mathrm{T}}}{\cos\ \theta_{\mathrm{I}}},\ \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Riflessione e trasmissione - III

Formule di Fresnel per i coefficienti di riflessione e trasmissione:

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad ; R_{\perp} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

$$T_{\parallel} = \alpha\beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 ; \; T_{\perp} = \frac{4\alpha\beta}{\left(1 + \alpha\beta\right)^2}$$

Riflessione totale

Onda incidente da mezzo piu' denso a uno meno denso:

$$n_1 > n_2,\ \sin\vartheta_T = \frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_I \rightarrow \vartheta_T = \frac{\pi}{2} \text{ per } \vartheta_I < \frac{\pi}{2}$$

Poiche' $\theta_T<\theta/2$, se $\theta_I>\theta_{lim}$ solo onda riflessa

Osservazione: come interpretare questo fisicamente?

$$\sin\vartheta_T > 1 \rightarrow \vartheta_T \text{ e' complesso}$$

$$\cos\vartheta_T = \pm\sqrt{1-\sin^2\vartheta_T} = \pm i\sqrt{\sin^2\vartheta_T - 1} = \pm i\sqrt{\sin^2\left(\frac{n_1}{n_2}\vartheta_I\right)-1}$$

$\cos\vartheta_T$ compare nell'esponenziale complesso che descrive

$\tilde{\mathbf{E}}_T \rightarrow$ onda evanescente lungo la superficie di separazione

Polarizzazione per riflessione

Riprendendo l'espressione per il campo riflesso con polarizzazione //:

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta}\tilde{E}_{0I}; \ \alpha = \frac{\cos\vartheta_{\mathrm{T}}}{\cos\ \theta_{\mathrm{I}}}, \ \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Si osserva che

$$\tilde{E}_{0R} = 0 \text{ quando } \alpha = \beta \rightarrow \frac{\cos\vartheta_{\mathrm{T}}}{\cos\ \theta_{\mathrm{I}}} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_I\right)^2}}{\cos\theta_I} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \tan\theta_I^B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Quando $\theta_I = \theta^B$, l'onda riflessa non ha comp. // Quindi l'onda e' *polarizzata*