Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

II – Onde nei conduttori; dispersione

Eq. di Maxwell nei conduttori-I

Legge fondamentale nei conduttori:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$ *Legge di Ohm microscopica*

Riscrittura eq. di Maxwell per conduttori:

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eq. di Maxwell nei conduttori-II

Eq. di continuita’ per la carica:

$$\nabla \bullet \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sigma \left(\nabla \bullet \mathbf{E} \right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \rightarrow \rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

La costante di tempo ε/σ e’ normalmente molto piccola: dopo un transiente (di cui ci disinteressiamo) la carica libera va a zero. Quindi:

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \underbrace{\mu \sigma \mathbf{E}}_{\text{termine aggiuntivo}} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eq. delle onde nei conduttori

Solito trucco di prendere il rotore del rotore: viene

$$\Delta\mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\Delta\mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Soluzione: per onde piane, soliti esponenziali complessi, *questa volta con numero d'onda complesso:*

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \rightarrow k = k_+ + ik_-$$

$$k_\pm = \omega\sqrt{\frac{\beta\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \pm 1\right]^{1/2}$$

Numero d'onda complesso

Si cercano soluzioni a onda piana: p.es., per il campo elettrico:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}, \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}, \Delta \mathbf{E} = \left(ik\right)^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$$

$$\rightarrow -k^2 \mathbf{E} + \left(\mu\varepsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma\right) \mathbf{E} = 0$$

$$\rightarrow k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma$$

Significato di $k_\pm$

$$\tilde{\mathbf{E}}(x,t)=\tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{0}e^{i(kx-\omega t)}=\tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{0}e^{i[k_+ + ik\_x]}e^{-i\omega t}=\tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{0}e^{-kx}\ e^{i(k_+x-\omega t)}$$

Quindi l'onda piana si *attenua* nel propagarsi dentro il conduttore. Lunghezza di attenuazione e lunghezza d'onda:

$$\lambda=\frac{2\pi}{k_+},v=\frac{\omega}{k_+},n=\frac{ck_+}{\omega}$$

$$d=\frac{1}{k_-}$$

Comportamenti diversi per *buoni* e *cattivi* conduttori

$$\text{Cattivi: }\frac{\sigma}{\varepsilon}\ll\omega\rightarrow \begin{array}{l} k_+\cong\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \\ k_-\cong\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\end{array}\qquad \text{Buoni: }\frac{\sigma}{\varepsilon}\gg\omega \begin{array}{l} k_+\cong\sqrt{\dfrac{\omega\sigma\mu}{2}} \\ k_-\cong\sqrt{\dfrac{\omega\sigma\mu}{2}}\end{array}$$

Propagazione di un'onda piana

Campo elettromagnetico: ***E*** oscilla nel piano *(x,y)*

$$\tilde{\mathbf{E}}(x,t) = \hat{\mathbf{y}}\tilde{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,t) = \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{k}{\omega}\right)\tilde{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$= \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{|k| e^{i\varphi}}{\omega}\right)\tilde{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$|k| = \sqrt{k_+^2 + k_-^2} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{k_-}{k_+}\right)$$

Si osserva che E e B non oscillano in fase; B ha un ritardo di fase ϕ

Conseguenze:

- *Densita' di energia quasi tutta magnetica*
- *Densita' di energia decresce lungo il percorso dell'onda*
- *Il conduttore viene scaldato dall'onda*

Riflessione e trasmissione - I

L'applicazione delle condizioni al contorno per E, B, D e H alla superficie di separazione fra 2 mezzi e' piu' laboriosa quando si e' in presenza di conduttori. Nel caso piu' interessante dielettrico→conduttore, ci si attende in linea di principio presenza di carica e corrente superficiali alla separazione fra i due mezzi :

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma \qquad \mathbf{E}_{1\parallel} - \mathbf{E}_{2\parallel} = 0$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \qquad \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2\parallel} = \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Riflessione e trasmissione - II

Osservato che sia σ, sia $\boldsymbol{j}$ devono essere nulli (perche' $E_\perp$ e' nullo da entrambi i lati; e perche' ci vorrebbe un campo infinito per avere una corrente superficiale finita), si trovano le solite espressioni per le polarizzazioni parallela e ortogonale al piano di incidenza

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta}\tilde{E}_{0I};\ \alpha = \frac{\cos\vartheta_{\mathrm{T}}}{\cos\ \theta_{\mathrm{I}}},\ \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1 + \alpha\beta}\tilde{E}_{0I};\ \alpha = \frac{\cos\vartheta_{\mathrm{T}}}{\cos\ \theta_{\mathrm{I}}},\ \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

dove pero' adesso β e' un numero complesso

Riflessione e trasmissione - III

- Per un conduttore ideale, $\sigma \to \infty$, $\beta \to \infty$ e si ha

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0$$

quindi l'onda e' totalmente riflessa, con sfasamento di π.

- Se abbiamo un conduttore reale, σ e' grande ma $<\infty$, e β e' grande in modulo; quindi, sviluppando in serie di potenze di $1/\beta$:

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} \cong -\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)^2 \cong \frac{2}{\beta} - 1$$

$$\to R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \cong \left(\frac{2}{\beta} - 1\right)^2 \cong 1 - \sqrt{8\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\omega\varepsilon_1}{\sigma}}$$

Il coefficiente di riflessione dipende dalla frequenza...

Dispersione

Evidenza che la propagazione dipende da 3 “costanti”: ε, μ, σ. In realta’, nessuna delle 3 e’ una costante.
In sintesi, la dipendenza di ε, μ dalla frequenza e’ dovuta alla *variazione della velocita’ dell’onda con la frequenza*.
Questo e’ complessivamente non inaspettato alla luce della struttura microscopica della materia: ci sono elettroni (liberi o legati alle molecole) che possono scambiare energia con campi elettromagnetici esterni; il confronto fra la frequenza del campo esterno e quelle proprie di oscillazione (atomiche/molecolari) fissa le caratteristiche della propagazione, inclusa la velocita’

Dispersione nei dielettrici

Modello semplificato: elettrone legato elasticamente nell'atomo, o molecola. Forza di richiamo armonica:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Giustificazione: configurazione atomica stabile→elettrone in un minimo di potenziale. Sviluppo vicino al minimo:

$$U(x) = U(0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \ldots$$

Ora: I termine si puo' porre = 0, II termine deve essere =0 (forza= 0 in un minimo di U), III termine e' quello di un oscillatore armonico

Modello classico semplificato

Equazione del moto per elettrone legato, con termine di smorzamento (p.es., dovuto a *radiazione*):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m\frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

con $E_{ext}(t)$ sinusoidale. Cerchiamo soluzioni stazionarie, usando il solito formalismo degli esponenziali complessi:

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{d\tilde{x}}{dt} = -i\omega\tilde{x}(t), \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\omega^2\tilde{x}(t)$$

Soluzione equazione del moto

$$-\tilde{x}(\omega^2-\omega_0^2)-i\gamma\omega\tilde{x}=-e\frac{\tilde{E}_0}{m}e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{x}_0(\omega^2-\omega_0^2)+i\gamma\omega\tilde{x}_0=e\frac{\tilde{E}_0}{m}$$

$$\rightarrow \tilde{x}_0=\frac{e\tilde{E}_0/m}{(\omega^2-\omega_0^2)+i\gamma\omega}$$

Si nota che:

1) La coordinata dell'elettrone e' sfasata rispetto a E_0 (il coefficiente di E_0 e' complesso); la fase varia da $-\pi$ a 0 al crescere della frequenza
2) L'ampiezza di oscillazione varia con ω, ed e' max. per $\omega=\omega_0$

Costante dielettrica complessa-I

Momento di dipolo indotto:

$$\tilde{p}(t) = e\tilde{x}(t) = \frac{e^2/m}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) - i\gamma\omega}\tilde{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Se ci sono diverse classi di elettroni in ogni molecola, con f_j elettroni nella classe j-esima, e se ci sono N molecole/unita' di volume

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{P}} = \frac{Ne^2}{m}\left(\sum_j \frac{f_j e^2/m}{\left(\omega^2 - \omega_{0j}^2\right) - i\gamma_j\omega}\right)\tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{0}$$

Costante dielettrica complessa-II

Ricordando la definizione di suscettivita' e costante dielettrica:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e\right)$$

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\left(\sum_j \frac{f_j e^2 / m}{\left(\omega^2 - \omega_{0j}^2\right) - i\gamma_j \omega}\right)\right]$$

che quindi si ritrova come quantita' complessa

Propagazione di un'onda piana

Onde piane in un mezzo dispersivo:

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}} = \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(x,t) = \tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{0} e^{i(kx-\omega t)}$$

Anche qui, *k* e' complesso:

$$k = k_+ + ik_- \rightarrow E = E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$\alpha = 2k_- \quad \text{coefficiente di assorbimento}$$

$$v = \frac{\omega}{k_+} \quad \text{velocita'} \rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{ck_+}{\omega} \text{ indice di rifrazione}$$

Notare che qui il numero d'onda complesso non e' dovuto alla conduttivita', ma al termine *dissipativo* nella forza

Parametri della dispersione

$$n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma_j^2\omega^2}$$

$$\alpha = 2k_- \cong \frac{Ne^2\omega^2}{m\varepsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma_j^2\omega^2}$$

Se $\omega < \omega_j$:

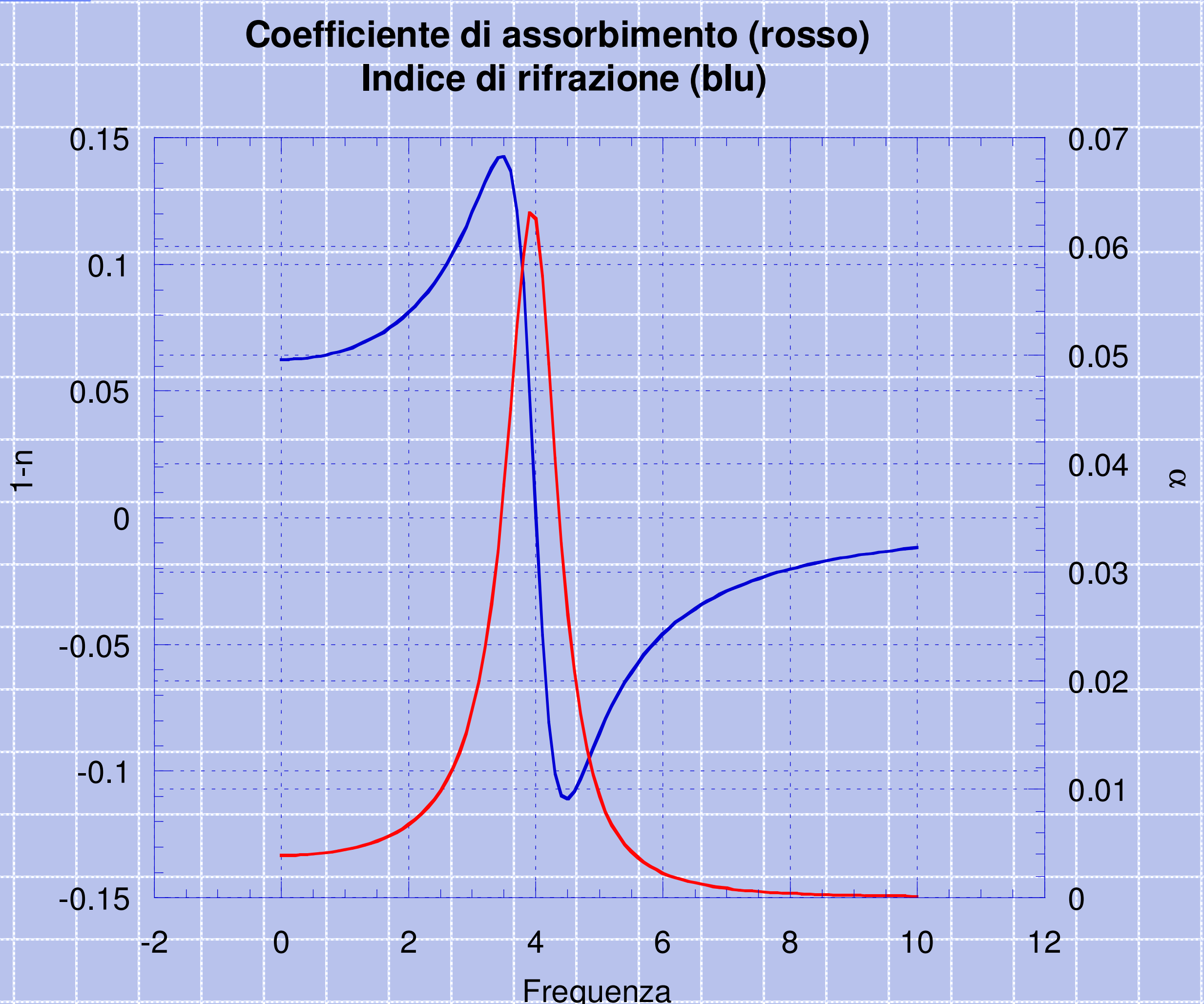
$$\frac{1}{\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)} \cong \frac{1}{\omega_j^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)$$

$$\rightarrow n = 1 + \left(\frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}\right) + \omega^2\left(\frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4}\right)$$

Legge di Cauchy

$$= 1 + A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Dispersione: n e α per $\omega \sim \omega_0$



Dispersione nei conduttori

Modello semplificato: elettroni liberi
Differenze rispetto ai dielettrici:

1) *Nessuna forza di richiamo*
2) *Generazione di corrente, invece che di polarizzazione*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma m\frac{dx}{dt} + eE_{ext}(t)$$

$$\rightarrow -\omega^2\tilde{x} - i\gamma\omega\tilde{x} = +e\frac{\tilde{E}_0}{m}e^{-i\omega t}$$

$$\omega^2\tilde{x}_0 + i\gamma\omega\tilde{x}_0 = -e\frac{\tilde{E}_0}{m} \rightarrow \tilde{x}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0/m}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

Conduttivita' complessa

Densita' di corrente generata:

$$\tilde{x}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0/m}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = -i\omega\tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = Nfe\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} \to \tilde{\mathbf{J}} = Nfei\omega\frac{e\tilde{\mathbf{E}}/m}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \underbrace{\frac{Nfe^2/m}{-i\omega + \gamma}}_{\sigma}\tilde{\mathbf{E}}$$

Generalizzazione della definizione di conduttivita'
Significato:ad alta frequenza corrente e campo non sono in fase

$k =$

Propagazione nel plasma

Ricordando l'espressione del numero d'onda complesso, vediamo l'effetto della conduttivita' anche lei diventata complessa:

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma \to k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\omega\mu\frac{Nfe^2/m}{-i\omega+\gamma}$$

In un plasma diluito, $\gamma\sim 0$, σ e' immaginaria pura e si ha:

$$\mu \cong \mu_0, \varepsilon \cong \varepsilon_0, \omega_p \equiv e\sqrt{\frac{Nf}{m\varepsilon_0}}$$

$$\to k^2 \cong \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_P^2\right)$$

ω_p e' la *frequenza di plasma* del mezzo

Propagazione nel plasma - II

Onde con frequenza > ω_p: numero d'onda reale

$$v = \frac{\omega}{k} = c\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Propagazione regolare

Onde con frequenza < ω_p: numero d'onda complesso
$\rightarrow$ Attenuazione con lunghezza caratteristica

$$d = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$