Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

III – Potenziali elettromagnetici; radiazione di dipolo

Eq. di Maxwell

Equazioni di Maxwell :

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

E' possibile e utile introdurre due nuove funzioni di *(**r**,t)* che rendono piu' semplice il trattamento delle equazioni: i potenziali scalare e vettore, ϕ e ***A***

Potenziale elettrostatico-I

Proprieta’ fondamentale del campo elettrico per il caso statico:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0 \text{ per campi statici}$$

Proprieta’ generale del rotore:

$$\nabla \times \left(\nabla f \right) \equiv 0$$

Quindi un campo elettrostatico si puo’ sempre scrivere come

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \;\; \varphi = \varphi\left(\mathbf{r}\right) \text{ funzione scalare di } (x, y, z)$$

ϕ si chiama *potenziale elettrostatico*, ed e’ definito a meno di una costante

Potenziale elettrostatico-II

La I equazione di Maxwell (teorema di Gauss) diviene *l'equazione di Poisson*:

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \bullet (-\nabla \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \Delta\varphi \equiv \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e nelle regioni in cui non ci sono cariche si riduce alla *equazione di Laplace*

$$\Delta\varphi = 0$$

Potenziale vettore-I

Proprieta' fondamentale del campo magnetico:

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$$

Proprieta' generale della divergenza:

$$\nabla \bullet \left(\nabla \times \mathbf{V} \right) \equiv 0$$

Quindi un campo magnetico si puo' sempre scrivere come:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},\ \mathbf{A} \text{ funzione vettoriale di } (x, y, z)$$

A si chiama *potenziale vettore*, ed e' definito a meno del gradiente di una funzione (scalare) qualsiasi

Potenziale vettore-II

La IV equazione di Maxwell si puo' allora scrivere, per campi statici:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \rightarrow \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) = \mu_0 \mathbf{j}$$

Usando il solito rotore del rotore:

$$\nabla \left(\nabla \bullet \mathbf{A} \right) - \Delta \mathbf{A} = \mu_o \mathbf{j}$$

che e' l'analogo dell'equazione di Poisson per ϕ.

Potenziali e gauge

ϕ e ***A*** definiti a meno di una costante e di una funzione di ***r;***
$\rightarrow$possibile richiedere che ϕ ed ***A*** soddisfino condizioni extra;
Per esempio si puo' chiedere che:

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = 0$$

Infatti, se A e' tale che

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = D(\mathbf{r})$$

si puo' costruire ***A'***

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \rightarrow \nabla \bullet \mathbf{A}' \equiv \nabla \bullet \mathbf{A} + \nabla^2 \chi$$

Scegliendo

$$\nabla^2 \chi = -D \rightarrow \nabla \bullet \mathbf{A}' = 0$$

Gauge di Coulomb (statico)

La scelta precedente viene chiamata *gauge di Coulomb*; con essa si ha per il caso statico:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

che e' l'analoga dell'eq. di Poisson per la magnetostatica. In questo gauge, le soluzioni generali per l'elettrostatica e la magnetostatica si scrivono:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|} d^3\mathbf{r'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|} d^3\mathbf{r'}$$

Caso dinamico: ϕ ed $\boldsymbol{A}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Quindi l'argomento del rotore si puo' scrivere come il gradiente di una funzione scalare:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Le equazioni per ϕ ed ***A***

Dalla I e IV equazione di Maxwell:

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla^2 \varphi + \frac{\partial \left(\nabla \bullet \mathbf{A} \right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \times \left(\nabla \times A \right) = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \left(\nabla \varphi \right)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Gauge di Lorentz

Le equazioni per ϕ ed ***A*** si possono semplificare e separare fissando il gauge; varie scelte possibili, fra le altre:

$$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{gauge di Lorentz}$$

In questo gauge le equazioni divengono:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Gauge di Coulomb

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = 0$$

Le equazioni per ϕ e per ***A*** diventano:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} + \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j}_\perp$$

Spiegazione: si puo' fare vedere che nella II equazione il termine con $\partial\phi/\partial\tau$ si combina con ***j***, lasciando a secondo membro solo la parte *trasversale* della densita' di corrente

Soluzioni statiche

Nel caso statico, le equazioni per i potenziali diventano nel gauge di Lorentz la solita equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

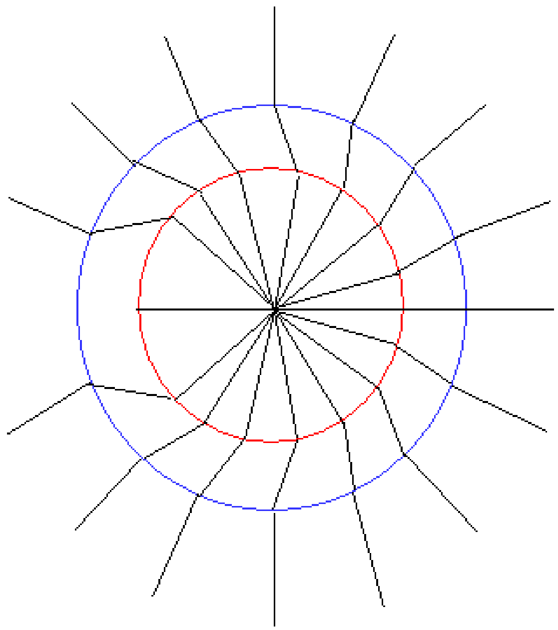
La soluzione generale e' data dalle espressioni integrali:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{r}'$$

Consistenti con la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione

L'origine del campo di radiazione



Linea rossa: estremo del campo dopo l'accelerazione

Linea blu: estremo del campo statico

Si considera una carica che e' inizialmente ferma→
il campo e' Coulombiano
Poi si fotografa il campo dopo che la carica ha e' stata soggetta a un'accelerazione a, di durata T
→il campo e' quello di una carica in moto con velocita' aT
La velocita' finita di propagazione dei campi e.m mostra che ci deve essere necessariamente una zona di transizione, che si sposta a velocita' c verso l'esterno

Estensione al caso dinamico

Modo euristico di trovare la soluzione: poiche' le onde e.m viaggiano nel vuoto a velocita' c, bastera' sostituire nella soluzione statica $\rho(\mathbf{r}')$ con $\rho(\mathbf{r}',t_r)$, essendo il tempo ritardato $t_r = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

Quindi, il valore del potenziale in un dato punto a un dato istante dipende dalla densita' in tutti gli altri punti, a istanti tanto piu' antichi quanto piu' i punti-sorgente sono distanti dal punto-campo

ϕ ed ***A*** verificano l'eq. di Poisson?

ϕ dipende da ***r*** in due modi: tramite il denominatore e tramite il numeratore, attraverso t_r. .
Passi successivi:

$$\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left((\nabla\rho)\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \rho\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\right)d\boldsymbol{r}'$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{-\frac{1}{c}\left[\dot\rho\left(\nabla\bullet\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) + \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\bullet\nabla\dot\rho\right]\right.$$
$$\left.-\left[\rho\left(\nabla\bullet\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right) + \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\bullet(\nabla\rho)\right]\right\}d\boldsymbol{r}'$$

Si usano questi risultati:

$$\nabla(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

...Si'!

Infatti:

$$\nabla \bullet \left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2} \right) = \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}$$

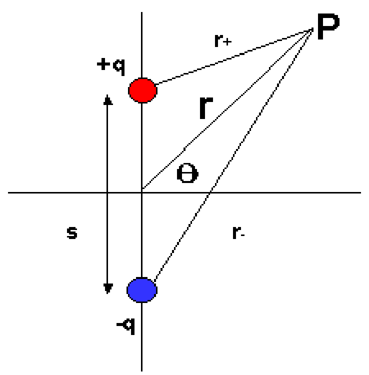
$$\nabla \bullet \left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} \right) = 4\pi\delta\left(\boldsymbol{r}\right)$$

da cui l'eq. di Poisson. Per il teorema di esistenza e unicita', queste sono anche le uniche soluzioni (che dipendono da 2+2*3=8 *funzioni arbitrarie*).

Si puo' far vedere che verificano anche la condizione di Lorentz, come deve essere.

Radiazione di dipolo elettrico- I

Modello di un dipolo: posizioni fisse, cariche variabili



$$r_+ = \sqrt{r^2 - rs\cos\theta + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + rs\cos\theta + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

Approssimazioni:

s<<r

s<<c/ω

$$\mathbf{p}(t) = q(t)\mathbf{s} = q_0\hat{\mathbf{k}}\cos\omega t$$

$$r_\pm \cong r\left(1 \mp \frac{1}{2}\frac{s}{r}\cos\theta\right) \rightarrow \frac{1}{r_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{1}{2}\frac{s}{r}\cos\theta\right)$$

Radiazione di dipolo elettrico - II

Potenziale scalare in P:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_0\cos\omega\left(t-r_+/c\right)}{r_+}-\frac{q_0\cos\omega\left(t-r_-/c\right)}{r_-}\right]$$

Con le approssimazioni citate:

$$\cos\omega\left(t-r_\pm/c\right)=\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\pm\frac{\omega s}{2c}\cos\theta\right]$$

$$=\cos\omega\left(t-r/c\right)\cos\left(\frac{\omega s}{2c}\cos\theta\right)\mp\sin\omega\left(t-r/c\right)\sin\left(\frac{\omega s}{2c}\cos\theta\right)$$

$$\cong\cos\omega\left(t-r/c\right)\mp\frac{\omega s}{2c}\cos\theta\sin\omega\left(t-r/c\right)$$

Radiazione di dipolo elettrico - III

Il potenziale scalare si scrive:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t-r/c\right)+\frac{1}{r}\cos\omega\left(t-r/c\right)\right]$$

Osservazioni:

1) Il II termine va come *1/r²*→analogo al caso statico
2) Il I termine va come 1/r
3) Se *r>>ω/c* (←*zona d'onda*) allora

$$\varphi(\mathbf{r},t)\cong\frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t-r/c\right)\right]$$

Radiazione di dipolo elettrico- IV

Per il potenziale vettore si procede in maniera simile, e si trova

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \cong -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r}\hat{\mathbf{k}}\sin\omega(t - r/c)$$

Dai potenziali si trovano i campi ***E*** e ***B***:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega(t - r/c)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega(t - r/c)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

θ e ϕ sono i versori sferici

Onde sferiche

Il campo di un dipolo elettrico oscillante, nella zona d'onda, ha la componente elettrica e quella magnetica con le seguenti caratteristiche:

1) ***E*** e ***B*** sono in fase
2) ***E*** e ***B*** sono ortogonali fra loro
3) ***E*** e ***B*** si propagano con velocita' c
4) $B=E/c$

Queste sono le caratteristiche di un'onda elettromagnetica; si tratta di un' *onda sferica*, che si propaga in tutte le direzioni

Flusso di energia

Calcoliamo il vettore di Poynting per il campo di dipolo:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{c}\left[\frac{p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega\left(t - r/c\right)\right]^2 \hat{\mathbf{r}}$$

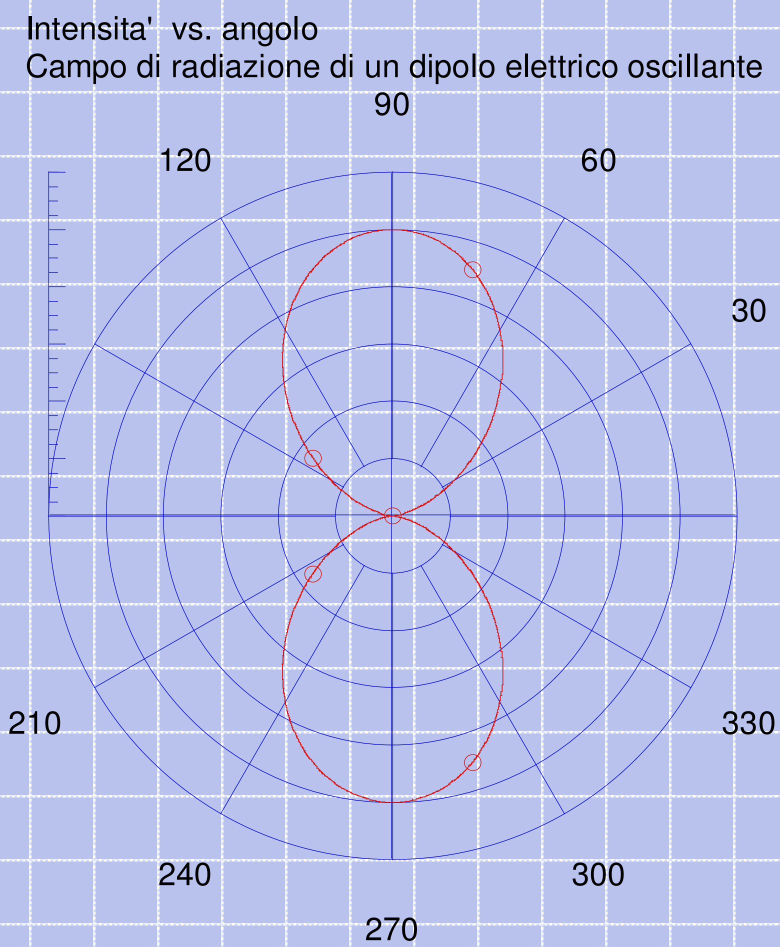
Media su un periodo:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Integrale sull'angolo solido (= potenza irraggiata):

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \bullet d\mathbf{a} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\right)\int \frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\bullet d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}$$

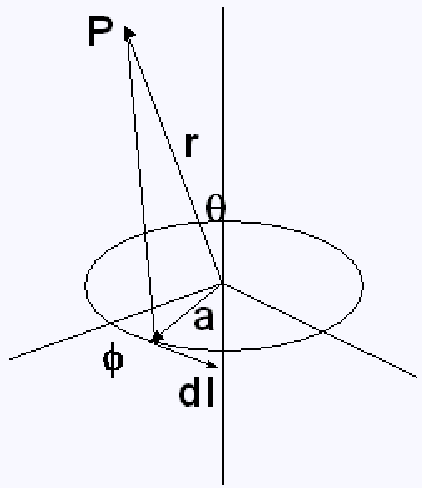
Grafico polare di <**S**>



L'asse del dipolo e' a 0 gradi
Intensita' max. a 90 gradi
Simmetria assiale

Nello spazio, la figura sembra una "ciambella" senza buco

Radiazione di dipolo magnetico



$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

$$\mathbf{m}(t) = \pi a^2 I(t)\hat{\mathbf{k}}$$

$$= m_0 \hat{\mathbf{k}} \cos \omega t$$

Spira, corrente oscillante, scarica:

$$\varphi \equiv 0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I_0 \cos \omega\left(t - \left(|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\right)/c\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} d\mathbf{l}$$

Con la geometria della figura:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 a \hat{\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega\left(t - \left(|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\right)/c\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \cdot$$

$$\cdot \cos \phi \, d\phi$$

Radiazione di dipolo magnetico

Procedendo come nel caso precedente, con le solite approssimazioni:

1) *a<<r*
2) *a<<c/ω*
3) *r>>c/ω   zona d'onda*

si trova per il potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\omega\left(t - r/c\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Radiazione di dipolo magnetico

Si ottengono i campi, il flusso di energia e la potenza Irraggiata:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega(t - r/c)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega(t - r/c)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{c}\left[\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega(t - r/c)\right]^2 \hat{\mathbf{r}}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 \hat{\mathbf{r}}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_0^2 \omega^4}{3c^5}$$

Rapporto fra potenze per dip. elettrico e magnetico:

$$P_{magn}/P_{elettr} = \left(\frac{m_0}{p_0 c}\right)^2 \sim \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2$$