Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

IV – Radiazione di multipolo

Distribuzione arbitraria di carica

Consideriamo una regione spaziale nella quale si trovi una distribuzione di carica. Con la solita approssimazione:

$$|\mathbf{r'}| \ll |\mathbf{r}|$$

su tutta l'estensione della distribuzione, si puo' scrivere:

$$|\mathbf{r'}-\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\bullet\mathbf{r'}} \cong \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\bullet\mathbf{r'}}$$

$$= r\sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r}\bullet\mathbf{r'}}{r^2}} \cong r\left(1 - \frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r'}}{r^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r'}-\mathbf{r}|} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r'}}{r^2}\right)$$

Approssimazione per ρ e ϕ

La densita' di carica si puo' allora scrivere:

$$\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\cong\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'}{c}\right)$$

Essa si puo' inoltre sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di *$t_0=t-r/c$* :

$$\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\cong\rho(\mathbf{r}',t_0)+\dot{\rho}(\mathbf{r}',t_0)\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'}{c}+\ldots$$

Lo sviluppo si puo' arrestare al I termine se:

$$r'<\frac{c}{\dot{\rho}/\ddot{\rho}},\frac{c}{\ddot{\rho}/\dddot{\rho}},\ldots$$

Condizioni non sempre facili da interpretare

Calcolo dettagliato di ϕ

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}d\mathbf{r}'$$

Dei 4 termini che nascono da questo prodotto, il IV si trascura perche' $\propto 1/r^3$

$$\cong\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}{c}\right)\frac{1}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}\right)d\mathbf{r}'$$

$$\cong\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\boxed{\left(\rho(\mathbf{r}',t_0)+\dot{\rho}(\mathbf{r}',t_0)\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'}{cr}\right)\left(1+\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}\right)}d\mathbf{r}'$$

$$\cong\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int\rho(\mathbf{r}',t_0)d\mathbf{r}'+\int\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}\rho(\mathbf{r}',t_0)d\mathbf{r}'+\int\dot{\rho}(\mathbf{r}',t_0)\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'}{c}d\mathbf{r}'\right]$$

$$\cong\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int\rho(\mathbf{r}',t_0)d\mathbf{r}'+\mathbf{r}\bullet\int\frac{\mathbf{r}'}{r^2}\rho(\mathbf{r}',t_0)d\mathbf{r}'+\hat{\mathbf{r}}\bullet\frac{d}{dt}\int\rho(\mathbf{r}',t_0)\frac{\mathbf{r}'}{c}d\mathbf{r}'\right]$$

Potenziale scalare

Possiamo ora calcolare il potenziale scalare con queste approssimazioni :

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int\rho(\mathbf{r}',t_0)\,d\mathbf{r}'+\frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}}\bullet\int\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}',t_0)\,d\mathbf{r}'+\frac{1}{c}\hat{\mathbf{r}}\bullet\frac{d}{dt}\int\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}',t_0)\,d\mathbf{r}'\right]$$

che dunque consta di tre termini:

$$\varphi_1(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\rho(\mathbf{r}',t_0)\,d\mathbf{r}'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ termine di *monopolo elettrico*

$$\varphi_2(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\bullet\int\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}',t_0)\,d\mathbf{r}'+\frac{1}{c}\hat{\mathbf{r}}\bullet\frac{d}{dt}\int\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}',t_0)\,d\mathbf{r}'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{p}(t_0)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 c}\hat{\mathbf{r}}\bullet\dot{\mathbf{p}}(t_0)$$ termine di *dipolo elettrico*

Interpretazione fisica

Il potenziale scalare approssimato si puo' dunque scrivere

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{p}\left(t_0\right)}{r^2}+\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\dot{\mathbf{p}}\left(t_0\right)}{rc}\right]$$

avendo introdotto il *momento di dipolo totale* della distribuzione, al tempo ritardato. Questi (termine di ***dipolo elettrico***) sono gli unici termini che restano nel calcolo dei campi all'∞ *(zona d'onda)*

Approssimazione per *j* ed *A*

Con le stesse approssimazioni fatte per ρ si puo' porre:

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\cong\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'}{c}\right)$$

Ricordando l'espressione del potenziale vettore, approssimiamo

$$\mathbf{A}(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$$\cong\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\left(1+\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}\right)\left(\mathbf{j}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{rc}\dot{\mathbf{j}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)d\mathbf{r}'$$

Calcolo dettagliato di *A*

Quindi ***A*** risulta la somma di quattro termini in questa approssimazione; il III e IV termine vanno come *$1/r^2$* e possono essere trascurati nella zona d'onda. Restano gli altri 2:

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{23}$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}\left(t - r/c\right) d\mathbf{r'}$$

$$\mathbf{A}_{23} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c} \int \dot{\mathbf{j}}\left(t - r/c\right) \mathbf{r} \bullet \mathbf{r'} d\mathbf{r'} \equiv \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$

Interpretazione fisica

Si puo’ mostrare che i termini sopravvissuti si possono scrivere

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}(t - r/c)\,d\mathbf{r}'$$

Non c’e’ radiazione di monopolo magnetico!

$$\rightarrow \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r} \qquad \text{termine di } \textit{monopolo magnetico}$$

$$\mathbf{A}_{23} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c}\int \dot{\mathbf{j}}(t - r/c)\,\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}' \equiv \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{r}}{r^2 c} \qquad \text{termine di } \textit{dipolo magnetico}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_3 = \frac{1}{3}\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{r^2 c} \qquad \text{termine di } \textit{quadrupolo elettrico}$$

I campi *E* e *B*: dipolo elettrico

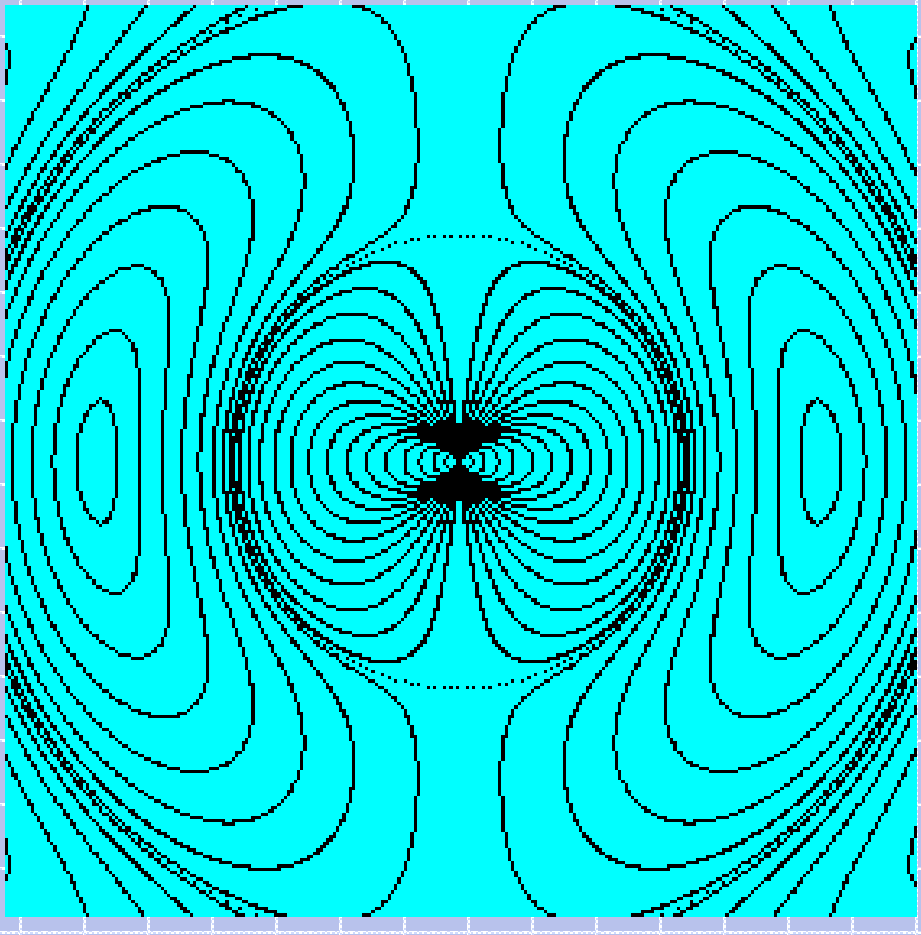
Come sempre, siamo ora interessati alla zona d'onda, nella quale i soli contributi che contano sono quelli $\propto$***1/r.***
Tenendo solo questi termini, si vede che
1) Il termine Coulombiano non conta
2) I campi ***E*** e ***B*** che sopravvivono all'infinito sono:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right)\hat{\mathbf{r}}-\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right]\to\frac{\mu_0}{4\pi}\ddot{p}(t_0)\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=-\frac{\mu_0}{4\pi rc}\left[\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right]\to\frac{\mu_0}{4\pi c}\ddot{p}(t_0)\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

dove la II espressione si ottiene scegliendo l'asse z lungo l'accelerazione del dipolo

Il campo E di un dipolo



Vettore di Poynting e potenza

Si calcola direttamente:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right|^2\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2\hat{\mathbf{r}}$$

E nel solito modo si calcola la potenza irraggiata:

$$P = \int \mathbf{S}\bullet d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right|^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\left|\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right|^2}{3c^3}$$

NB: i termini $\propto 1/r^2$, $1/r^3$,…non contribuiscono a P $\rightarrow$OK trascurarli!

nella quale come si vede compare l'accelerazione al quadrato

Osservazioni

Cosa abbiamo fatto?
Abbiamo calcolato, *all'ordine piu' basso in r'*, i campi *che contribuiscono alla radiazione* (←che vanno all'∞ come *1/r,* e non piu' rapidamente)

$$\boxed{\frac{1}{\left|\mathbf{r'}-\mathbf{r}\right|} \cong \frac{1}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r'}}{r^2}\right)}$$

Cosa deduciamo dal risultato trovato?
Il primo termine e' quello di ***dipolo elettrico*** ; se fosse =0, dovremmo passare qui all'ordine superiore, e troveremmo 2 termini: ***dipolo magnetico*** + ***quadrupolo elettrico***

I multipoli

Il calcolo fatto prima assumeva che l'unico termine importante fosse quello di *dipolo elettrico*; se questo termine fosse nullo, entrerebbero i campi di *dipolo magnetico* e *quadrupolo elettrico*, poi quelli di *quadrupolo magnetico* e *ottupolo elettrico*, e cosi' via

Risistemazione della teoria

Quanto detto fin qui puo' essere riespresso in maniera piu' sistematica e chiarificatrice.

1) I potenziali sono legati alle densita' nel modo noto

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}d\mathbf{r}'$$

come soluzioni dell'eq. d'onda non omogenea

Approssimazione

2) I termini che devono essere considerati nei potenziali sono quelli che vanno all'∞ come *1/r*, e non piu' rapidamente, perche' non darebbero contributo ai campi nella zona d'onda

3) Quindi si puo' approssimare, se $|\boldsymbol{r}| >> |\boldsymbol{r}'| \leq a$, dove *a* e' la dimensione spaziale della distribuzione

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \cong \frac{1}{r}$$

Notare la differenza..

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \cong r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

Le approssimazioni fatte si possono riassumere:

$$r \gg \lambda \gg a$$

Potenziali approssimati

4) Scriviamo allora i potenziali

$$\varphi(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \rho\left(t - r/c + \hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'/c, \mathbf{r}'\right)d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}\left(t - r/c + \hat{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{r}'/c, \mathbf{r}'\right)d\mathbf{r}'$$

nelle quali espressioni sono state fatte le approssimazioni citate sopra.
Prima di occuparci di ***A***, cerchiamo le espressioni per ***E*** e ***B***

Campo magnetico - I

Le espressioni per il campo B e' ora, scambiando l'ordine di derivata e integrale:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} (\nabla \times \mathbf{j}) + \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \mathbf{j} \right) d\mathbf{r'}$$

Questo termine si puo' trascurare, perche' da' contributi al campo che all'∞ vanno come $1/r^2$

Per calcolare il rotore, osserviamo che:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \frac{1}{c} \frac{\partial \left(-r + \hat{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{x'} \right)}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \frac{1}{c} \frac{\partial \left(-r + \hat{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{x'} \right)}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \frac{1}{c} \frac{\partial \left(-r + \hat{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{x'} \right)}{\partial z}$$

Campo magnetico - II

E quindi:

$$\nabla\times\mathbf{j}=\frac{1}{c}\nabla\left(-r+\mathbf{x'}\bullet\hat{\mathbf{r}}\right)\times\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}=\frac{1}{c}\left(-\hat{\mathbf{r}}+\nabla\left(\mathbf{x'}\bullet\hat{\mathbf{r}}\right)\right)\times\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}$$

Questo termine si puo' trascurare, perche' da' contributi al campo che all'∞ vanno come *$1/r^2$*. In conclusione:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int(\nabla\times\mathbf{j})d\mathbf{r'}=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\frac{1}{c}\left(-\hat{\mathbf{r}}\right)\times\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}d\mathbf{r'}$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi c}\hat{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\mathbf{j}}{r}d\mathbf{r'}\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi c}\hat{\mathbf{r}}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

*Questo e' **A***

Campo elettrico - I

Il campo elettrico si trova nel modo piu' diretto facendo uso della condizione di Lorentz sui potenziali. Essendo per definizione:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

si puo' fare per $\nabla\phi$ un ragionamento analogo a quello fatto per $\nabla\times\boldsymbol{A}$, trovando:

$$\nabla \varphi \cong -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c}\nabla \bullet \mathbf{A}$$

in virtu' della condizione di Lorentz. Per cui

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \cong -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \hat{\mathbf{r}}\left(\nabla \bullet \mathbf{A}\right)$$

Campo elettrico - II

In questo modo il campo elettrico dipende solo da ***A***, e non da ϕ. La $\nabla \bullet \mathbf{A}$ si puo' esprimere, come prima, attraverso la derivata rispetto a t e le derivate di t rispetto alle coordinate, ottenendo:

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \bullet \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \hat{\mathbf{r}} \left(\hat{\mathbf{r}} \bullet \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

Sviluppo in serie di Taylor della *j*

Questo ricalca esattamente quanto visto prima:

$$\mathbf{j}(t - r/c + \mathbf{x}'\bullet\hat{\mathbf{r}}/c, \mathbf{x}') = \mathbf{j}(t - r/c, \mathbf{x}') + \frac{\mathbf{x}'}{c}\bullet\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \ldots$$

E infine, lo sviluppo per il potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}(t - r/c, \mathbf{x}')d\mathbf{r}' + \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\left(\hat{\mathbf{r}}\bullet\frac{\mathbf{x}'}{c}\right)d\mathbf{r}' + \ldots$$

Termine di:

dipolo elettrico

dipolo magnetico+quadrupolo elettrico

quadrupolo magnetico+ottupolo elettrico