Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

IX – Propagazione nei mezzi anisotropi

Resume’ mezzi anisotropi

$$\mathbf{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$$ definizione di n ("indice di rifrazione")

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$$

Resume' mezzi anisotropi

Da considerazioni termodinamiche:

ε e' un tensore simmetrico
$\rightarrow$e' diagonalizzabile (assi principali)

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \varepsilon_{33} = \varepsilon_3$$

Resume' mezzi anisotropi

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})-a^2\mathbf{b}\quad \text{identita' vettoriale}$$

$$\rightarrow \mathbf{D}=\left[\mathbf{E}n^2-\mathbf{n}(\mathbf{E}\bullet\mathbf{n})\right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{\varepsilon}\mathbf{E}=\left[\mathbf{E}n^2-\mathbf{n}(\mathbf{E}\bullet\mathbf{n})\right] \\ \mathbf{D}=\left\{\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}\right)n^2-\mathbf{n}\left[\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}\right)\bullet\mathbf{n}\right]\right\} \end{cases}$$

Relazioni fra le componenti di ***E*** o di ***D***: definiscono una superficie nello spazio degli indici di rifrazione o delle velocita' di raggio

Resume' mezzi anisotropi

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j \rightarrow \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j = E_i n^2 - n_i \sum_{k=1}^{3} n_k E_k$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j = \sum_{l=1}^{3} E_l n^2 \delta_{il} - n_i \sum_{k=1}^{3} n_k E_k$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j = \sum_{l=1}^{3} E_l \left(n^2 \delta_{il} - n_i n_l \right)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{3} E_j \left(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

3 equazioni a cui soddisfano le 3 componenti di ***E***; $\rightarrow$ deve essere *det(coefficienti) = 0* $\rightarrow$ equazione per le 3 comp. di ***n***

Resume' mezzi anisotropi

Le componenti di ***n***, n_1, n_2, n_3 soddisfano alla relazione

$$n^2\left(\varepsilon_1 n_1^2+\varepsilon_2 n_2^2+\varepsilon_3 n_3^2\right)+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$
$$-\left[\varepsilon_1 n_1^2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+\varepsilon_2 n_2^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)+\varepsilon_3 n_3^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\right]=0$$

Equazione di Fresnel per gli indici di rifrazione (o per i vettori d'onda)

Nello spazio degli indici di rifrazione questa e' una superficie del 4° ordine

A una data una direzione corrispondono in generale *2 valori diversi* di n^2

Resume' mezzi anisotropi

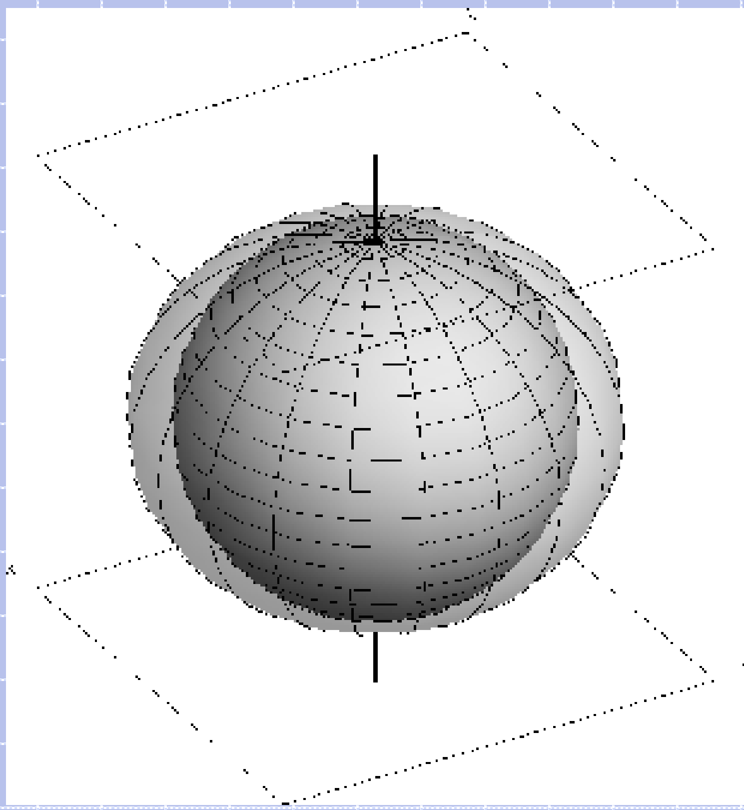
Se si scrivono esplicitamente le 3 equazioni:

Propagazione lungo un asse cristallino (es. x)
$\rightarrow$2 velocita' di fase diverse a seconda della direzione del campo elettrico

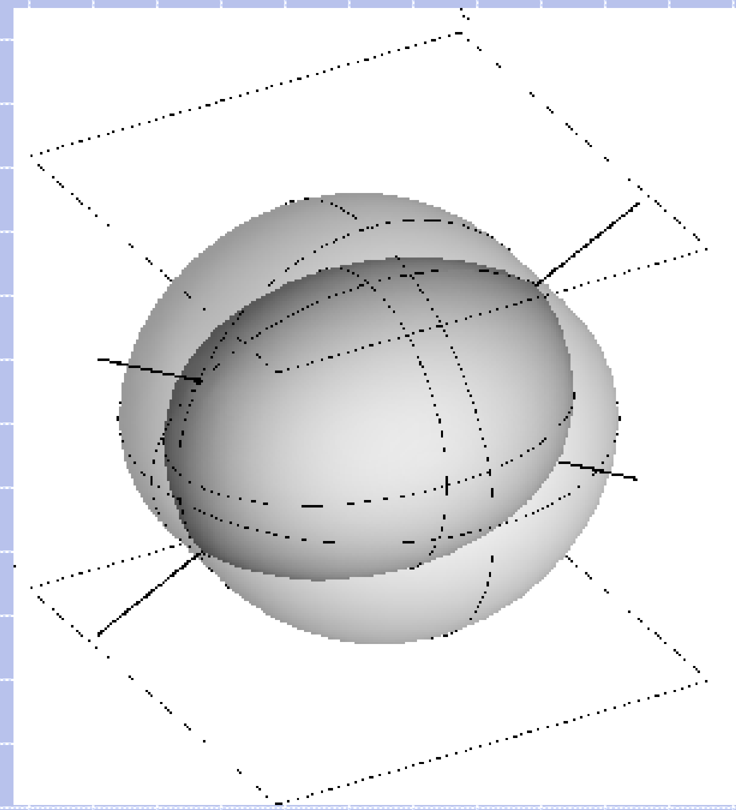
$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_y \rightarrow v=v_1$

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_z \rightarrow v=v_2$

Superficie dei vettori d'onda



Uniassico



Biassico

Superficie dei vettori d'onda

2 strati, esterno ed interno
1 punto di contatto
(direzione asse ottico)

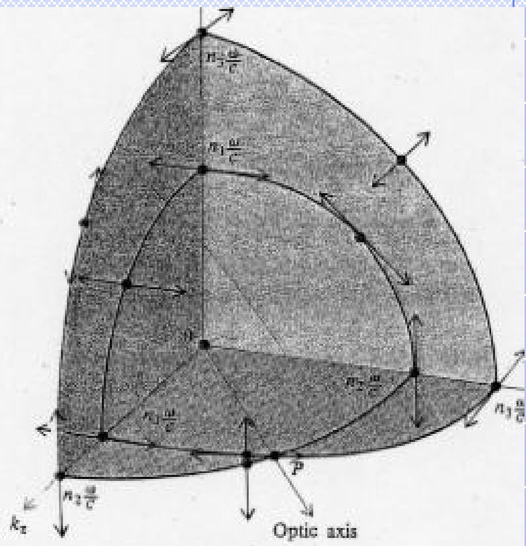
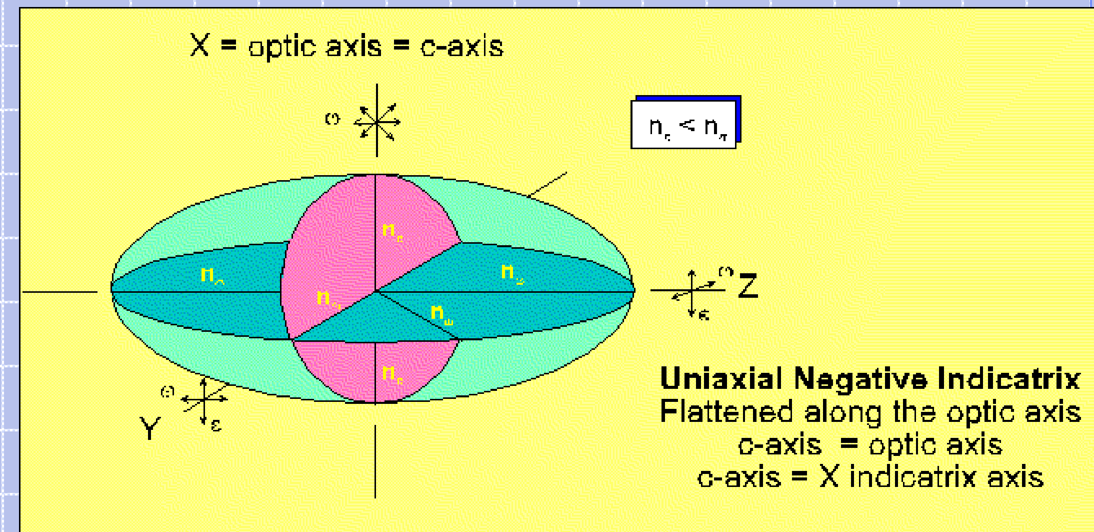
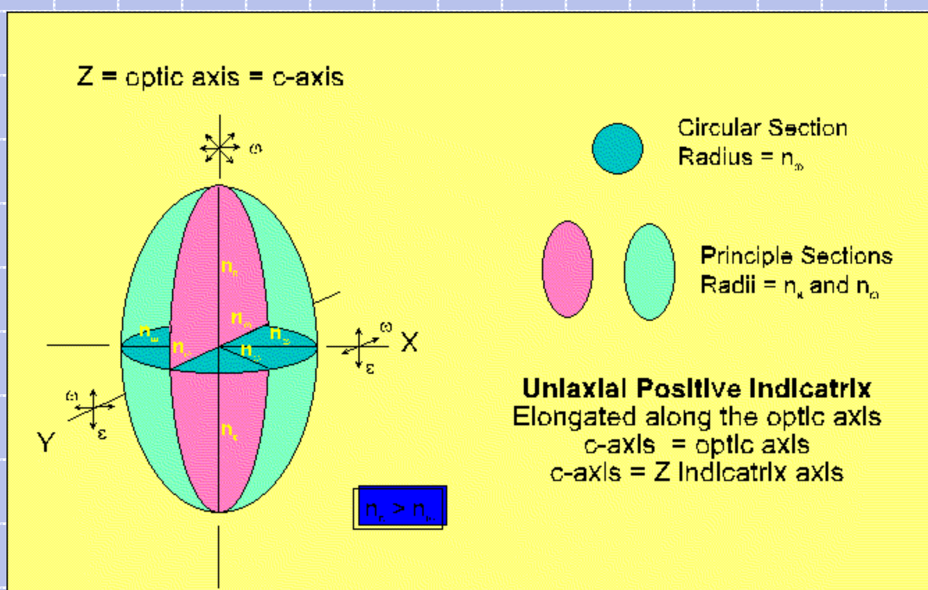


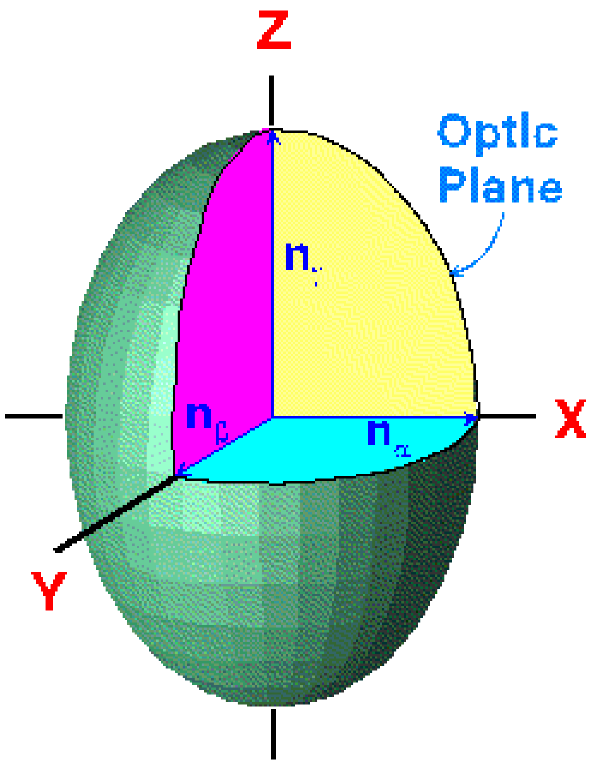
Figure 6.8. The wave-vector surface.

Indicatrice





Indicatrice



Biaxial minerals have three indices of refraction, (n_α, n_β, n_γ) each of which is measured along an indicatrix axis as shown on the left, such that the following relationship holds: $n_\alpha < n_\beta < n_\gamma$.

XZ plane with axes n_α and n_γ

YZ plane with axes n_β and n_γ

XY plane with axes n_α and n_γ

Resume' mezzi anisotropi

Invece degli indici di rifrazione, si possono considerare le *velocita' di fase:*

$$\mathbf{k} = \mathbf{v}\frac{\omega}{v^2}$$

Nello spazio delle velocita' di fase si ha un'altra superficie analoga alla precedente

La *velocita' di raggio* (trasporto di energia) e' // al vettore di Poynting. Si definisce un vettore *velocita' di raggio*:

$$\mathbf{u} = \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\mathbf{v}$$

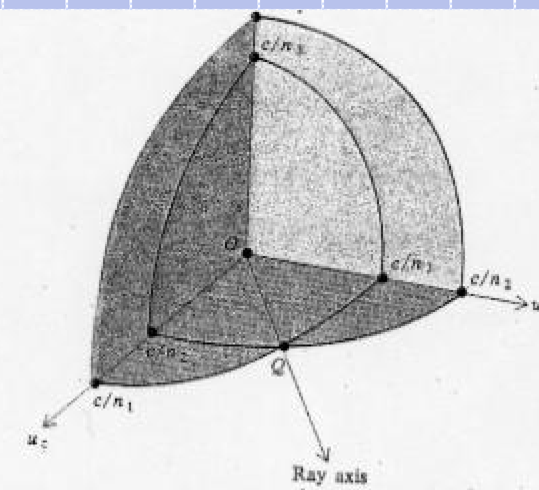
Resume' mezzi anisotropi

L'equazione a cui soddisfano le componenti di ***u*** si trova sfruttando la simmetria vista prima:

$$1+u^2\left(\varepsilon_2\varepsilon_3u_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_3u_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_2u_3^2\right)$$
$$-\left[u_1^2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+u_2^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)+u_3^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\right]=0$$

Nello spazio delle velocita' di raggio anche questa e' una superficie del 4º ordine $\rightarrow$ anche qui ci sono *2 valori diversi* di u^2 per ogni direzione

Superficie dei raggi



gure 6.12. The ray-velocity surface.

Resume' mezzi anisotropi

Le equazioni per ***n*** e per ***u*** sono del II ordine in n^2, u^2:

- fissato p.es. n^2, ci sono 2 valori $\pm n$, che corrispondono ovviamente a un'onda progressiva e a una regressiva

- i 2 valori di n^2 , in generale attinenti ad una data direzione, corrispondono a 2 *velocita' di fase* diverse
- i 2 valori di u^2 corrispondono a due *velocita' di gruppo (del trasporto di energia)* diverse

Resume’ mezzi anisotropi

Commenti sulle superficie considerate:

Superficie del IV ordine

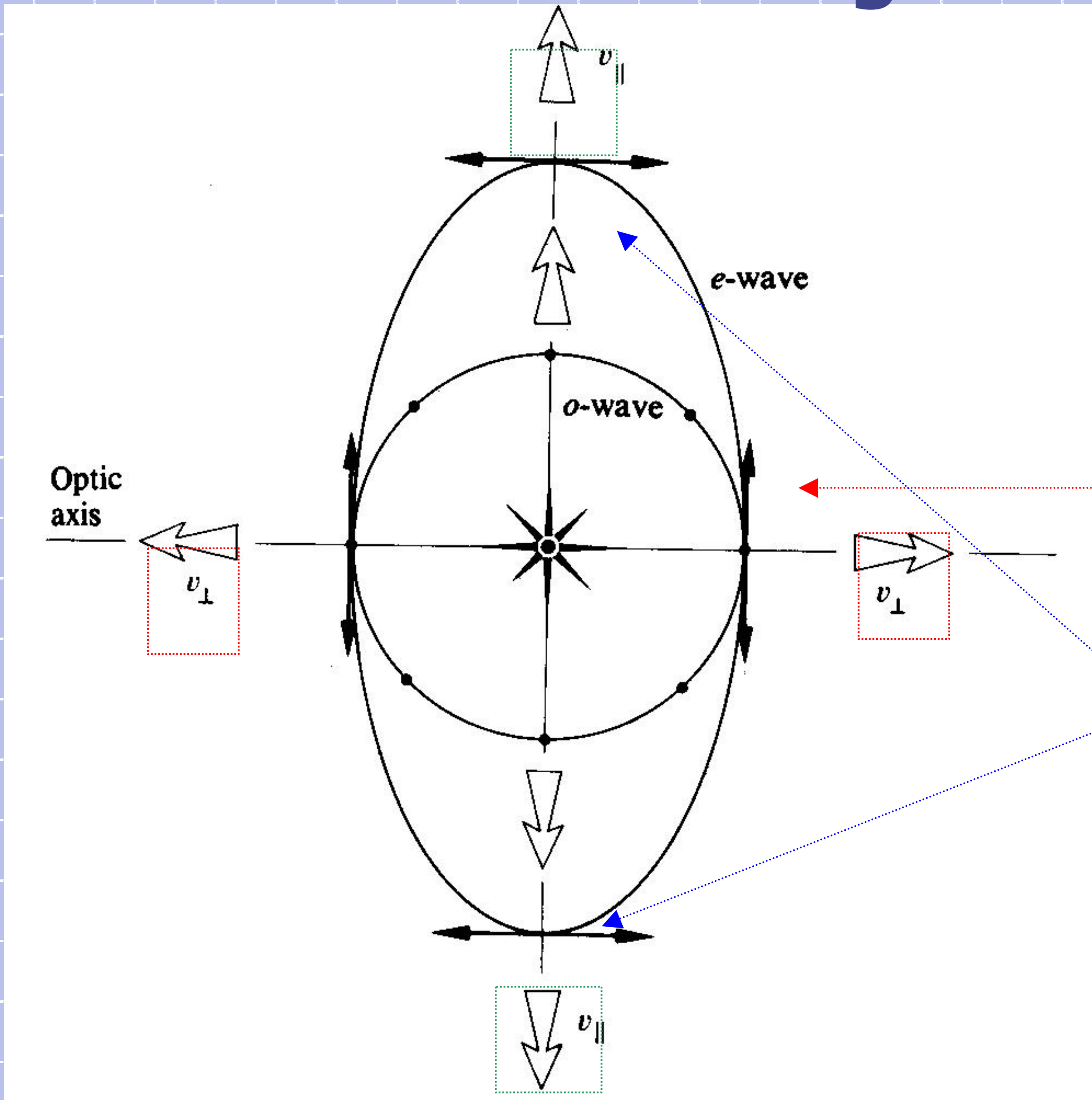
2 strati, interno ed esterno

1 o 2 punti di contatto: direzioni assi ottici

Classificazione cristallina

Isotropi	$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$	Cubico	NaCl
Uniassici	$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	trigonale tetragonale esagonale	Ghiaccio,calcite
Biassici	$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$	triclino monoclino ortorombico	Feldspato

Cristallo uniassico negativo



$$n_o = c / v_\perp , n_e = c / v_{//}$$

$$v_{//} > v_\perp$$

$$\Delta n = (n_e - n_o) < 0$$

The* E*-field of the o-wave* is *everywhere normal to the optical axis.

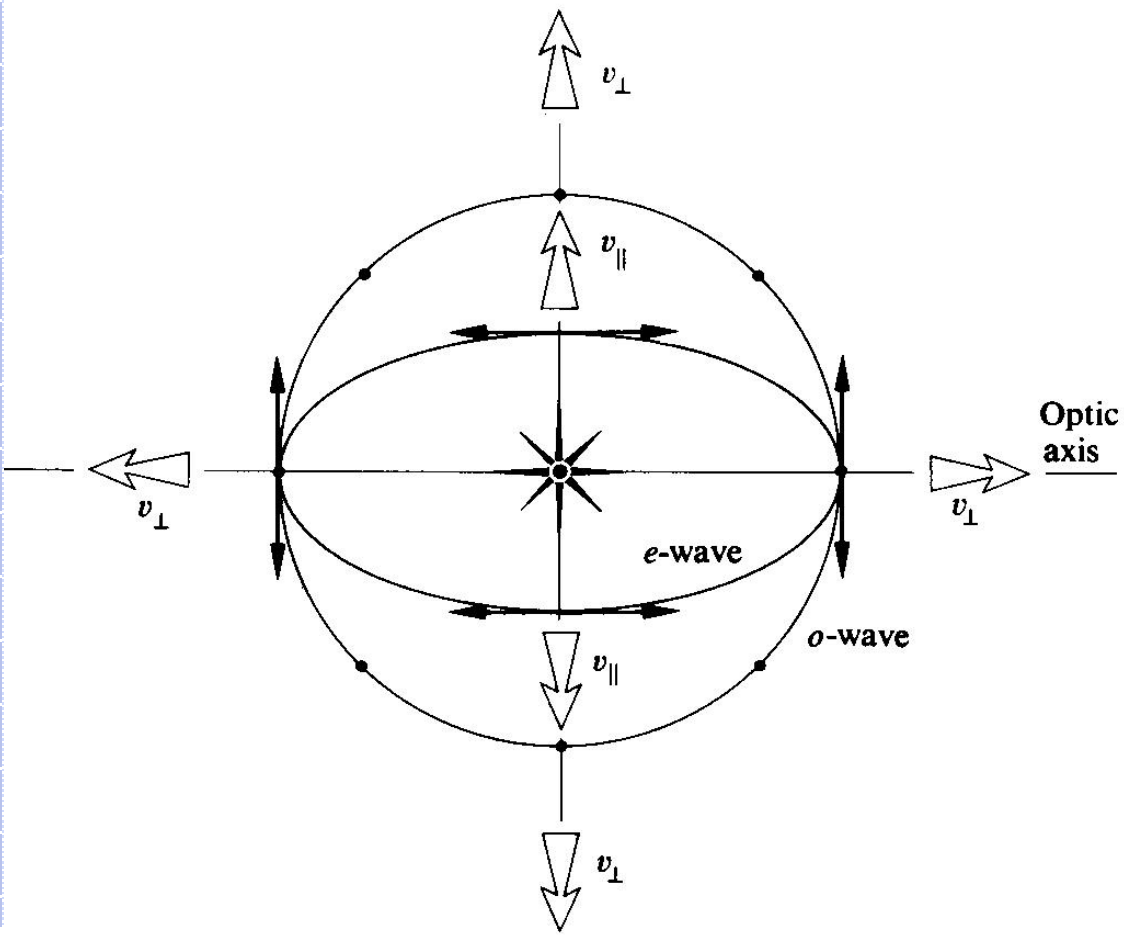
The* E*-field of the e-wave* is *everywhere parallel to the optical axis.

Un solo asse ottico

Cristallo uniassico positivo

$$v_{//} < v_{\perp}$$
$$\Delta n = (n_e - n_o) > 0$$

Un solo asse ottico



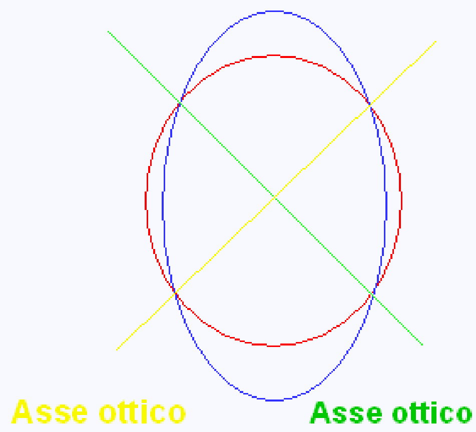
Wavelets in a positive uniaxial crystal.

Esempi cristalli uniassici

Refractive indices of some uniaxial birefringent crystals (λ_0 = 589.3 nm).

Crystal	n_o	n_e
Tourmaline	1.669	1.638
Calcite	1.6584	1.4864
Quartz	1.5443	1.5534
Sodium nitrate	1.5854	1.3369
Ice	1.309	1.313
Rutile (TiO_2)	2.616	2.903

Cristallo biassico



Due assi ottici