Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

V – Radiazione da una carica accelerata

Equazioni d'onda inomogenee

Per i potenziali sappiamo che, nel gauge di Lorentz, valgono le equazioni d'onda:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}$$

con le soluzioni "alla Poisson" viste a suo tempo. Le equazioni sono non omogenee (termine noto), quindi:

Integrale Generale= Int Gen Omogenea+ Int Particolare

Carica puntiforme - I

I calcoli che faremo *NON* contengono approssimazioni

Consideriamo il caso di una carica puntiforme.

- Se q e' statica, ossia indipendente da t:

$$\rho(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = q\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x_0})$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{x}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x_0})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{x}'$$

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Carica puntiforme - II

- Se q e' in moto, allora avremo in generale:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$t_r=t-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/c$, quindi ***r'*** *dipende da t*

dove t_r e' il tempo ritardato.
La difficolta' nel calcolo di ϕ ed ***A*** sta nel fatto che t_r non e' un tempo fisso: <u>tutti</u> gli istanti precedenti a *t* concorrono a determinare il potenziale a *t*. Quindi il volume sul quale si fa l'integrazione su ***r'*** e' difficile da definire, perche'…

Carica puntiforme - III

In questo caso le densita' di carica e corrente si scrivono:

$$\rho(\mathbf{r},t) = q\delta\left[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)\right]$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = q\mathbf{v}\delta\left[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)\right]$$

il che porta alla seguente espressione per i potenziali:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{x}\left(t - \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|/c\right)\right]}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{q\mathbf{v}\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{x}\left(t - \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|/c\right)\right]}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} d\mathbf{r}'$$

Carica puntiforme - IV

L'espressione trovata e' difficile da integrare, perche' $t_r = t - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/c$, quindi $\mathbf{r}'$ dipende da t: occorre cioe' conoscere la traiettoria della carica punto per punto. Per semplificare le cose, si ricorre ad una apparente complicazione: *si cambia l'integrando in*

$$\frac{q\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{x}\left(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c\right)\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \frac{q\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\delta\left[t' - \left(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c\right)\right]$$

aggiungendo ovviamente un'integrazione su t'.
Questo in realta' semplifica molto le cose…

Carica puntiforme - V

Infatti:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int\frac{q\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left[t'-\left(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c\right)\right]d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dt'\int\frac{q\mathbf{v}\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left[t'-\left(t-|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|/c\right)\right]d\mathbf{r}'$$

$$\rightarrow\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|}\delta\left[t'-\left(t-|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|/c\right)\right]$$

$$\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|}\delta\left[t'-\left(t-|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|/c\right)\right]$$

Carica puntiforme - VI

Proprieta' della δ:

$$\delta\left[f(x)\right]=\sum_{i=1}^{n_{zeri}}\frac{\delta(x-x_i)}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i}}$$

Nel ns caso, chiamato *t** lo zero dell'argomento:

$$\delta\left[t'-\left(t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c\right)\right]=\frac{\delta\left[t'-t^*\right]}{\left.\frac{\partial f}{\partial t'}\right|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}}$$

$$f(t')=t'-\left(t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c\right)$$

Carica puntiforme - VII

Il denominatore si calcola con la regola della derivata di una funzione composta per il tramite di piu' variabili (in questo caso, *t* e' una funzione di *t'* tramite ***x****(t')* …):

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \bullet \frac{d\mathbf{x}}{dt'}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t'}} = \frac{1}{1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \bullet \frac{d\mathbf{x}}{dt'}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')}{c\left|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')\right|} \bullet \mathbf{v}(t')\Big|_{t = t' + \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')\right|/c}}$$

Carica puntiforme - VIII

Introducendo i vettori

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')\right|}$$

Versore della direzione punto-campo→punto-carica a t ritardato

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \equiv \boldsymbol{\beta} c$$

Velocita' della carica al tempo ritardato

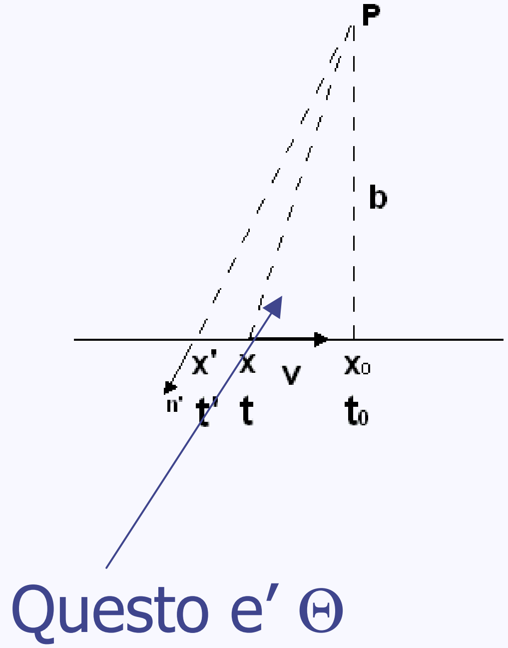
si trova l'espressione finale:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left(1-\hat{\mathbf{n}}\bullet\boldsymbol{\beta}\right)\left|\mathbf{r}-\mathbf{x}\right|}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{\left(1-\hat{\mathbf{n}}\bullet\boldsymbol{\beta}\right)\left|\mathbf{r}-\mathbf{x}\right|}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Potenziali di Lienard-Wiechert

Moto uniforme - Potenziali



Si trova in questo caso per i potenziali:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{\left(c^2t-\mathbf{r}\bullet\mathbf{v}\right)^2-\left(c^2-v^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}}{\sqrt{\left(c^2t-\mathbf{r}\bullet\mathbf{v}\right)^2-\left(c^2-v^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}}{w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta}}$$

essendo $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t$ in questo caso

Moto uniforme - Campi

Dai potenziali si ricavano i campi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{w}\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left[w^2\left(1 - v^2/c^2\right)\sin^2\Theta\right]^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

Significato di ***w****:*
e' la posizione *<u>attuale</u>* *della particella rispetto al punto campo*

Le linee di ***E***, come si vede, *non* sono isotrope
Le linee di ***B*** sono simmetriche intorno a ***v.***
In questo modo si ritrova la legge di Ampere

Carica accelerata - Campi

Le espressioni per i potenziali di Lienard-Wiechert trovate prima sono generali; tuttavia per ricavare i campi le cose sono piu' complicate quando la carica e' accelerata.
Il risultato e' il seguente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1-\hat{\mathbf{n}}\bullet\boldsymbol{\beta}\right)^3}\left\{\frac{\left(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}\right)\left(1-\left(v/c\right)^2\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\right|^2}+\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left[\left(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\mathbf{v}}'\right]}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\right|}\right\}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c^2}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}\Big|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

in cui ***x*** e' la posizione della particella al tempo ritardato

Il campo di radiazione

Nelle espressioni trovate prima:

un termine $\propto$ *1/r²* $\rightarrow$ *non conta* nella zona d'onda
campo di velocita'

un termine $\propto$ *1/r* $\rightarrow$ *conta* nella zona d'onda
campo di accelerazione

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1-\hat{\mathbf{n}}\bullet\boldsymbol{\beta}\right)^3}\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left[\left(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\mathbf{v}}'\right]}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\right|}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c^2}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{rad}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Vettore di Poynting - *NR*

Nel limite non relativistico $\beta \to 0$, le formule precedenti si scrivono:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{v}}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\right|}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{rad}\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left|\mathbf{E}_{rad}\right|^2 \hat{\mathbf{n}}$$

Potenza irraggiata - *NR* - I

La potenza irraggiata per unita' di angolo solido si trova nel solito modo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{S}||\mathbf{r}-\mathbf{x}|^2\Big|_{t=t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c} = \frac{\mu_0}{4\pi}|\mathbf{E}_{rad}|^2|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^2\Big|_{t=t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}$$

$$= \frac{\mu_0 q^2}{64\pi^3\varepsilon_0^2}\left|\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\dot{\mathbf{v}}'\right)\right|^2\Big|_{t=t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}$$

Questo si puo' scrivere, essendo Θ l'angolo fra accelerazione e direzione di propagazione:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{64\pi^3\varepsilon_0^2}|\dot{\mathbf{v}}|^2\sin^2\Theta\Big|_{t=t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}$$

Potenza irraggiata - *NR* - II

La formula precedente mostra una totale rassomiglianza con quella per la radiazione di un dipolo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \sin^2 \theta$$

La potenza irraggiata totale si ottiene integrando su tutto l'angolo solido, e viene:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left| \dot{\mathbf{v}} \right|^2 \Big|_{t = t' + \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}(t') \right| / c}$$

Questa e' la *formula di Larmor* per la potenza emessa quando la velocita' e' bassa in confronto a *c*

Potenza irraggiata - *R* - I

Le cose cambiano un po' se il moto della carica e' relativistico. In effetti, la formula di Larmor si puo' scrivere:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{\mathbf{v}}\right|^2\Big|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\bullet\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|^2\Bigg|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Nel cercare un'estensione relativistica, si deve sostituire il fattore non invariante con uno invariante:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \to \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

Potenza irraggiata - *R* - II

Quindi:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \left| \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \right|^2 \Bigg|_{t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c}$$

in cui p^μ e' il 4-impulso e $d\tau$ e' l'elemento di tempo proprio. Usando

$$E = \gamma m c^2, \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \gamma m \boldsymbol{\beta} c$$

P puo' essere espressa come:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0} \gamma^6 \left[\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2 - \left(\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2 \right]$$ *Formula di Lienard*