Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

VI – Esempi di sistemi radianti relativistici

Osservazioni

$$P_{NR} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left|\dot{\mathbf{v}}\right|^2 \Big|_{t=t'+\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c} \qquad P_R = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0} \gamma^6 \left[\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2 - \left(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2 \right]$$

P_{NR} e' *indipendente* dalla velocita'

P_R e' *fortemente dipendente* dalla velocita'

L'effetto relativistico e' un effetto *cinematico*, dovuto alle leggi relativistiche di trasformazione delle coordinate spazio-temporali

Moto rettilineo

Consideriamo un moto unidimensionale:

Allora, ***v***//***a*** e ***v***×***a***=0, quindi:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^6\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2, \quad \boldsymbol{\beta} \parallel \dot{\boldsymbol{\beta}}$$

Per es., in un acceleratore lineare l'accelerazione ha luogo solo in tratti molto corti del percorso, mentre nel resto le particelle accelerate si muovono a velocita' costante. In questo caso quindi la perdita per irraggiamento e' piccola

Moto circolare

Se la carica si muove su un’orbita circolare, allora $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}$, e $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = va$. Si ha quindi:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0}\gamma^6\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2\left(1-\beta^2\right) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^4\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2, \boldsymbol{\beta} \perp \dot{\boldsymbol{\beta}}$$

Quindi la potenza irraggiata varia con la 4ª potenza dell’energia, ed e’ il maggior fattore limitante negli acceleratori circolari, visto che in questo caso la accelerazione (centripeta) e’ costante

Caso generale

- Immaginando di scomporre istante per istante la accelerazione in componenti parallela e ortogonale alla velocita', abbiamo:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\gamma^6\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\parallel}\right)^2 + \gamma^4\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}\right)^2\right]$$

Si noti che la potenza e' un invariante di Lorentz, essendo il rapporto fra due 4e componenti di un 4-vettore che si trasformano nello stesso modo nel passare da un sistema di riferimento ad un altro

Distribuzione angolare - *R* - I

Componente radiale del vettore di Poynting:

$$\mathbf{S}\bullet\mathbf{n}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\left|\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left[\left(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{\left(1-\boldsymbol{\beta}\bullet\hat{\mathbf{n}}\right)^3}\right|^2\right]_{t=t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}$$

Essa rappresenta la potenza per unita' di area *intercettata* nel punto di osservazione all'istante *t*. Quel che e' piu' utile e' la potenza per unita' di area *irraggiata* all'istante *t'* dell'emissione, data da

$$\mathbf{S}\bullet\mathbf{n}\Big|_{t'}=\mathbf{S}\bullet\mathbf{n}\,\frac{dt}{dt'}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\left|\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left[\left(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{\left(1-\boldsymbol{\beta}\bullet\hat{\mathbf{n}}\right)^3}\right|^2\right]_{t=t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}\frac{dt}{dt'}$$

Distribuzione angolare - *R* - II

La quantita’ *dt/dt’* si trova nel solito modo:

$$t = t' + \left|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')\right|/c$$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \bullet \frac{d\mathbf{x}}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')}{c\left|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')\right|} \bullet \mathbf{v}(t')\Bigg|_{t = t' + \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')\right|/c} = 1 - \mathbf{n} \bullet \boldsymbol{\beta}\Big|_{t = t' + \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Quindi l’espressione cercata e’:

$$\mathbf{S} \bullet \mathbf{n}\Big|_{t'} = \mathbf{S} \bullet \mathbf{n}\frac{dt}{dt'} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{\left|\mathbf{r}\right|^2}\frac{\left|\hat{\mathbf{n}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right|^2}{\left(1 - \boldsymbol{\beta} \bullet \hat{\mathbf{n}}\right)^5}\right]_{t = t' + \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')\right|/c}$$

$$\to \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{\left|\hat{\mathbf{n}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right|^2}{\left(1 - \boldsymbol{\beta} \bullet \hat{\mathbf{n}}\right)^5}\right]_{t = t' + \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Distribuzione angolare - *R* - III

Questa espressione si riduce a quella di Larmor per $\beta \to 0$
Se invece il moto della carica e' relativistico:

- Moto rettilineo: scegliendo l'asse polare lungo β

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left| \dot{\mathbf{v}} \right|^2 \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \beta\cos\theta\right)^5}$$

L'angolo a cui l'intensita' e' massima e':

$$\theta_{\max} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+15\beta^2} - 1}{3\beta} \right) \xrightarrow[\beta\to 1]{} \frac{1}{2\gamma}$$

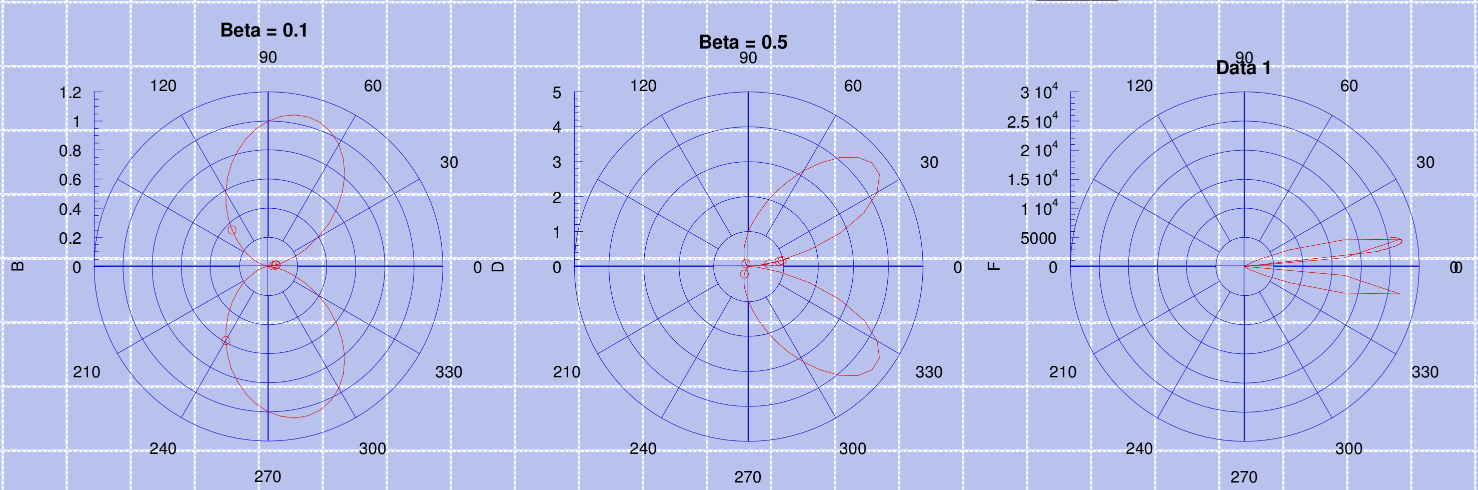
Distribuzione angolare - *R* - IV

- Moto circolare: in questo caso, ***v*** e ***a*** sono ortogonali. Scegliendo a un dato istante l'asse x lungo ***a*** e l'asse z lungo ***v*** si ha:

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{t'} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{c^2\left|\dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2}{\left(1-\beta\cos\theta\right)^3}\left[1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\gamma^2\left(1-\beta\cos\theta\right)^2}\right]$$

L'angolo polare a cui si ha il massimo di intensita' e', per $\gamma >> 1$:

Esempio di effetto relativistico



Si nota il progressivo spostarsi in avanti, entro angoli piccoli, del massimo dell'intensita', che aumenta anche vistosamente (moto rettilineo)

Intensita' totale irraggiata

E' istruttivo confrontare la potenza totale irraggiata nel moto rettilineo e in quello circolare:

$$P_{rett} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{\mathbf{v}}\right|^2 \gamma^6 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2$$

$$P_{circ} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{\mathbf{v}}\right|^2 \gamma^4 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^2\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2$$

Nel moto circolare (***a*** trasversale) l'intensita' irraggiata e' γ^2 volte quella del moto rettilineo, a parita' di $d\mathbf{p}/dt$

Caratteristiche spettrali

La potenza emessa per unita' di angolo solido si puo' scrivere come

$$\frac{dP}{dt} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\left|\mathbf{E}r(t)\right|^2 \equiv \left|\mathbf{A}(t)\right|^2$$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{q}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0 c}}\mathbf{E}r$$

L'energia totale emessa per unita' di angolo solido si puo' scrivere come:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathbf{A}(t)\right|^2 dt$$

Caratteristiche spettrali - II

Introduciamo la trasformata di Fourier di ***A****(t)*:

$$\mathbf{A}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{A}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\ \mathbf{A}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{A}(t)e^{+i\omega t}dt$$

Ricordando l'uguaglianza di Parseval, si puo' scrivere:

$$\frac{dE}{d\Omega}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathbf{A}(t)\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathbf{A}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Essendo

$$\frac{dE}{d\Omega}=\int_0^\infty\frac{d^2E}{d\omega d\Omega}d\omega\rightarrow\frac{d^2E}{d\omega d\Omega}=2\left|\mathbf{A}(\omega)\right|^2$$

A*(-ω)=****A*****(ω)*
se ***A****(t)* e' reale

Effetto "torcia elettrica"

La forte direzionalita' dell'irraggiamento porta alla rivelazione della radiazione stessa, in un punto fisso lontano dall'orbita, sotto la forma di brevi impulsi luminosi,periodici

v. Simulazione su Web