Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

VII – Fenomeni radiativi di interesse astrofisico

Radiazione di sincrotrone

Radiazione da una carica in moto circolare uniforme:
Si e' trovata la distribuzione angolare

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{t'} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{c^2\left|\dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2}{\left(1-\beta\cos\theta\right)^3}\left[1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\gamma^2\left(1-\beta\cos\theta\right)^2}\right]$$

la potenza totale emessa

$$P_{circ} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{\mathbf{v}}\right|^2\gamma^4$$

e la potenza emessa per rivoluzione

$$P_{circ} = \frac{4\pi}{3}\frac{q^2}{a}\beta^3\gamma^4$$

RS - Contenuto spettrale

1) Considerazioni semiquantitative

Tipicamente il fenomeno avviene in seguito a "cattura" di un elettrone di alta energia da un campo magnetico

La formula per la potenza totale si puo' riscrivere

$$P_{circ} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{\mathbf{v}}\right|^2 \gamma^4 = \frac{2}{3}\frac{\omega_0^2 q^2}{mc^3}\beta^2\gamma^4$$

essendo *a* il raggio dell'orbita circolare.

Per il moto in un campo magnetico uniforme:

$$\omega_0 = \frac{qB}{m\gamma} \rightarrow P = mc^2\,\frac{2}{3}\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \frac{r_0}{c}\left(\beta\gamma\right)^2$$

RS - Contenuto spettrale

Elemento di orbita $\Delta\theta$: tempo di emissione dato da

$$\Delta t' = \frac{\Delta\theta}{\omega_0}$$

nel riferimento della carica. Nel riferimento dell'osservatore:

$$\Delta t = (1-\beta)\,\Delta t' = \frac{\Delta\theta}{\omega_0}(1-\beta) \cong \frac{\Delta\theta}{2\omega_0\gamma^2}$$

Poiche' l'ampiezza angolare della radiazione emessa e' $\sim 1/\gamma$

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_0\gamma^3} \rightarrow \Delta\omega \propto \omega_0\gamma^3$$

RS - Contenuto spettrale

2) Dall'espressione generale dei potenziali di L-W:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e\mathbf{u}}{r-\mathbf{r}\bullet\mathbf{u}/c}\right] = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\mathbf{u}}{r\left[1-\left(u/c\right)\sin\alpha\cos\left(\omega_0 t'\right)\right]}$$

Ci aspettiamo che ***A*** sia una funzione periodica del tempo, visto che il moto della carica lo e': allora si puo' scomporlo in serie di Fourier (discreta), con il risultato, per la potenza irraggiata nell'armonica l-esima:

$$P_l = \begin{cases} 0.52\left(\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\right)\omega_0^2 l^{1/3}, \quad 1 \ll l \ll \gamma^3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\dfrac{l}{\gamma}\right)^{1/2} e^{-\frac{2l}{3\gamma^3}}, \ l \gg \gamma^3 \end{cases}$$

Bremsstrahlung

La radiazione di frenamento e' prodotta nel passaggio di particelle cariche di alta energia in un campo coulombiano. Facciamo un calcolo approssimato, non relativistico:

$$F = m\dot{u} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 (b^2 + u^2 t^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \dot{u} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 m (b^2 + u^2 t^2)^{3/2}}$$

b=par. d'urto
t=0 max avvicinamento

Facendo lo sviluppo in integrale di Fourier:

$$\dot{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(b^2 + u^2 t^2)^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

BS - Scomposizione spettrale

Poiche' la funzione a fattore di $e^{i\omega t}$ e' pari, si puo' scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(b^2+u^2t^2)^{3/2}}e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Zq^2}{2\pi\varepsilon_0 m}\int_0^{\infty}\frac{1}{(b^2+u^2t^2)^{3/2}}\cos\omega t dt$$

L'integrale non si puo' esprimere tramite trascendenti elementari; tuttavia vale la rappresentazione

$$K_1\left(\frac{\omega b}{u}\right)=\frac{b}{u\omega}\int_0^{\infty}\frac{1}{(b^2+u^2t^2)^{3/2}}\cos\omega t dt$$

K_1: funzione di Bessel modificata di ordine 1

Quindi:

$$\dot{u}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\frac{2\omega}{u^2}K_1\left(\frac{\omega b}{u}\right)$$

BS - Funzioni di Bessel

Si ha approssimativamente:

$$K_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x < 1 \\ e^{-x}, x \gg 1 \end{cases}$$

per cui:

$$\dot{u}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0 m} \dfrac{1}{ub} & , \omega < \dfrac{u}{b} \\ 0 & , \omega > \dfrac{u}{b} \end{cases}$$

BS - Distribuzione angolare

La distribuzione angolare/spettrale dell'energia irraggiata si trova attraverso la formula di Larmor (siamo in app. non relativistica):

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{q^4}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\frac{2}{\pi}\frac{c^2}{u^2b^2}\sin^2\theta$$

Lo spettro in frequenza e' "bianco" (uniforme) in questa approssimazione. Integrando sugli angoli:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{4q^4}{3\pi\varepsilon_0 mc^2}\frac{c}{u^2b^2}$$

Limiti su b fissati dal dettaglio dell'interazione

Distribuzioni angolari/spettrali

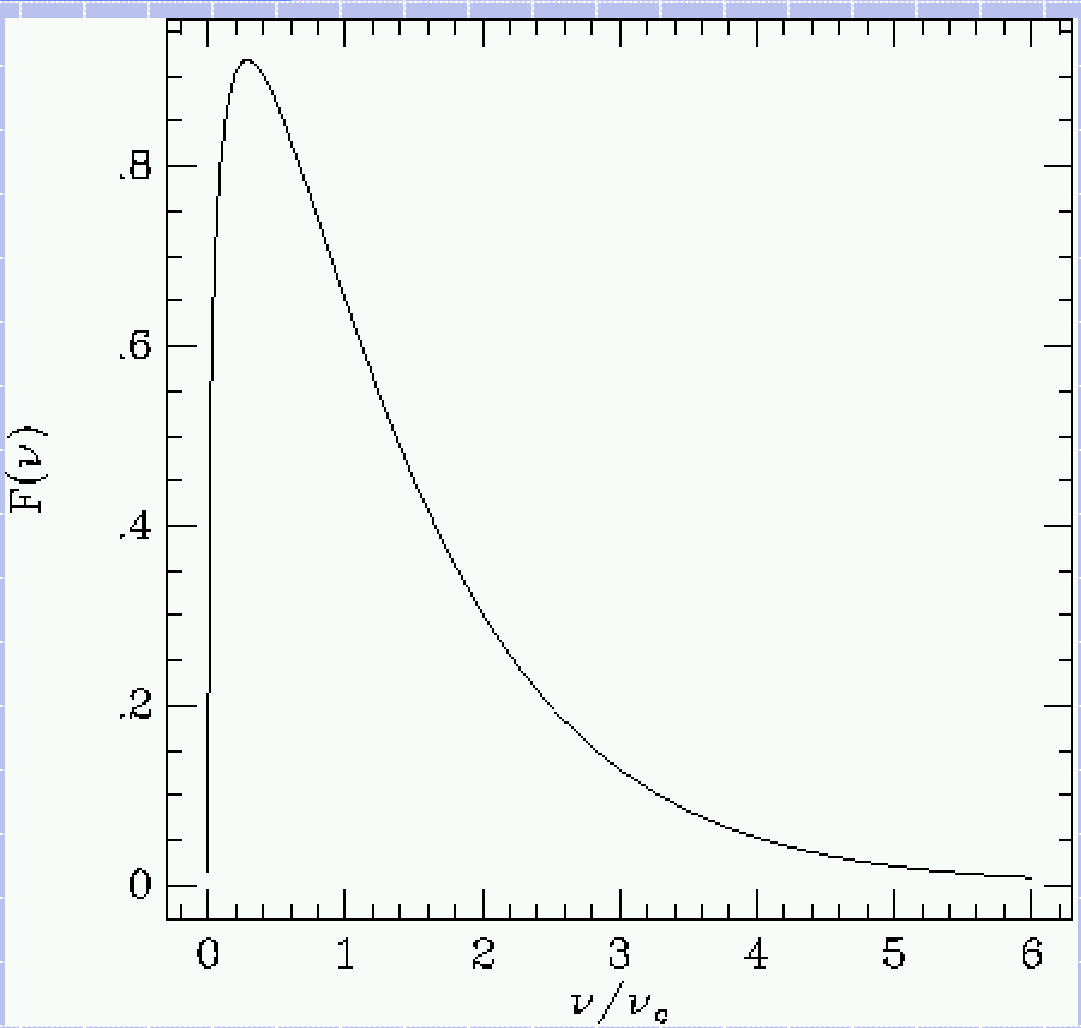
1) La caratteristica a bassa frequenza $\propto\omega^{1/3}$ e' il segno distintivo della radiazione di sincrotrone in astrofisica

2) Inoltre la radiazione e' fortemente *polarizzata* nel piano dell'orbita (circa il 90 %)

1) Nella bremsstrahlung lo spettro e' piatto

2) La distribuzione angolare e' piccata attorno alla direzione della velocita'

Spettro RS - Elettrone singolo



Situazioni astrofisiche - I

1) Lo spettro di RS dato da elettroni monoenergetici deve essere convoluto con la distribuzione di energia degli elettroni: p.es., uno spettro di tipo potenza

$$n(\gamma)\,d\gamma = C\,\frac{d\gamma}{\gamma^p}$$

Allora la distribuzione spettrale convoluta e':

$$P(\omega) = \int n(\gamma) P(\omega;\gamma)\,d\gamma$$

$$\rightarrow P(\omega) \propto \frac{1}{\omega^{(p-1)/2}}$$

Spettri tipici da radio-galassie: *p~2.5-3.0*

Esempio di convoluzione

271

General distribution of electrons

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\nu} = \iint \mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\Omega_\alpha\, n(\gamma,\alpha)P(\nu), \text{ the spectral emission per unit volume,}$$

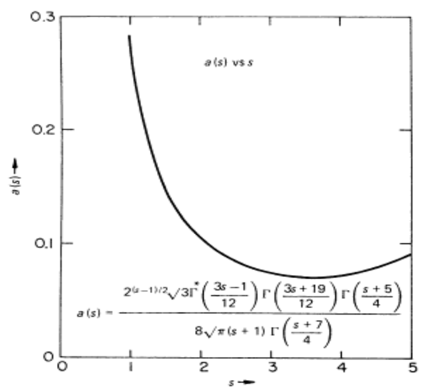
where $n(\gamma,\alpha)\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\Omega_\alpha$ = density of electrons with Lorentz factor between γ and $\gamma + \mathrm{d}\gamma$ and pitch angle between α and $\alpha + \mathrm{d}\alpha$; $\mathrm{d}\Omega_\alpha = 2\pi \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$; $P(\nu)$ = single electron spectrum.

Power law distribution of electrons

$$n(\gamma,\alpha) = N\gamma^{-s}g(\alpha)/4\pi,$$

and for local isotropy $g(\alpha) = 1$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\nu} = 1.7 \times 10^{-21} N a(s) B (4.3 \times 10^6 B/\nu)^{(s-1)/2}\ \mathrm{erg\ s^{-1}\ cm^{-3}\ Hz^{-1}}.$$



* note: $\Gamma(x)$ is the gamma function.

(Tucker, W. H. & Blumenthal, G. R., *op. cit.*)

Situazioni astrofisiche - II

2) Si consideri la BS di un flusso di elettroni che passa in una nube di gas (statico). Densita' volumetriche di elettroni e ioni n_e, n_i; velocita' degli elettroni u. Energia emessa per unita' di tempo e unita' di volume, e per unita' di frequenza:

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = 2\pi n_i n_e u \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} b\,db\,\frac{dE(b)}{d\omega} \cong \frac{4q^4}{3\pi\varepsilon_0 mc^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} b\,db\,\frac{c}{u^2 b^2}$$

$$= \frac{8q^4 n_i n_e}{3\varepsilon_0 mc^2} \frac{1}{u} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Situazioni astrofisiche - III

Limiti superiore e inferiore di integrazione:

$$\omega < \omega_c \rightarrow b < b_{\max} \sim \frac{u}{\omega}$$

$$b > b_{\min} = \frac{h}{mu}$$

Radiazione Cherenkov - I

Eq. d'onda inomogenea in un mezzo materiale: se

$$\mu = \mu_0$$
$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

allora l'eq.per il potenziale vettore e':

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

In un mezzo materiale, $c \rightarrow c/n$, e puo' accadere che $\beta > c/n$

Radiazione Cherenkov - II

Densita' di corrente:

$$\mathbf{j}(t) = e\mathbf{u}\delta(x'-ut)\delta(y')\delta(z')$$ *Moto uniforme lungo x*

Trasformata di Fourier:

$$\mathbf{j}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathbf{j}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{q}{\sqrt{2\pi}}\hat{\mathbf{x}}e^{\frac{i\omega x'}{u}}\delta(y')\delta(z')$$

Energia emessa: flusso del vettore di Poynting. In un intervallo di frequenza $\omega, \omega + d\omega$:

$$\frac{dP}{d\omega} = \int \frac{d^2P}{d\Omega d\omega}d\Omega = \frac{q^2\omega^2 n}{16\pi^3\varepsilon_0 c^3}\int \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left[(\omega x'/u) - kx'\cos\theta\right]}dx' \right|^2 \sin^2\theta d\Omega$$

Radiazione Cherenkov - III

Integrale interno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left[x'(\omega/u - k\cos\theta)\right]} dx' = \delta\left[(\omega/u) - k\cos\theta\right] = \delta(1 - nu\cos\theta/c)$$

che ci dice che la distribuzione angolare della radiazione e' fortemente piccata all'angolo

$$\cos\theta = \frac{1}{nu/c} = \frac{1}{\beta n}$$

Integrale sull'angolo solido:

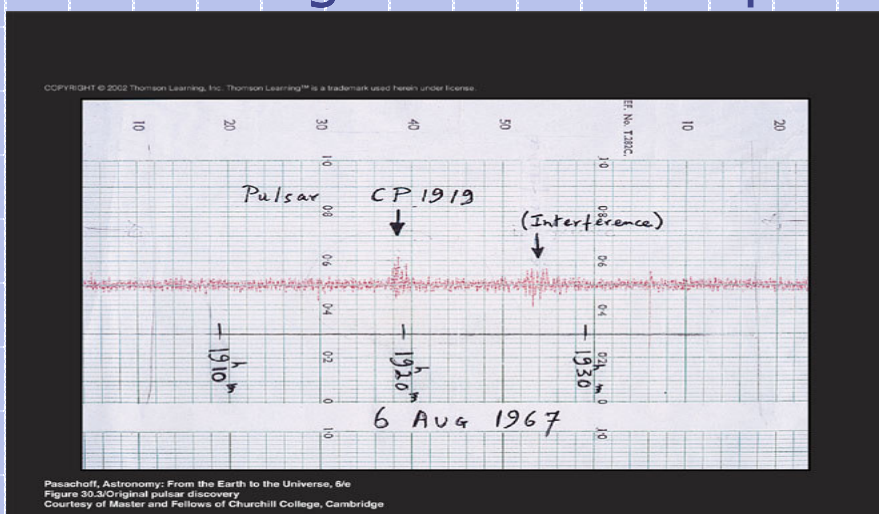
$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{q^2 X}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right)\omega$$

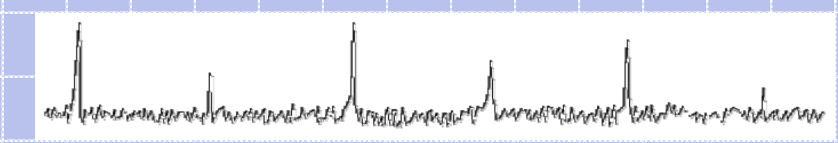
X: spessore materiale attraversato (necessario per fare convergere gli integrali…)

Pulsar - I

Predetti *(Pacini 1967)*
Scoperti *(Hewish & Bell 1968)*
Interpretati *(Gold,Pacini, Goldreich& 1968-69)*
Che cosa sono?

Radio-sorgenti intense e periodiche, a periodo breve





Sinistra: il primo scoperto
Sopra: uno tipico

Pulsar - II

Interpretazione accettata:

Stelle di neutroni, magnetiche, in rotazione, disallineate

Fine evoluzione stellare: collasso gravitazionale
Risultato: dipende dalla massa della stella
Limite di Chandrasekhar:

$$m < 1.4 m_{\odot} \rightarrow \text{ gigante } \rightarrow \text{nana bianca}$$

$$5 m_{\odot} > m > 1.4 m_{\odot} \rightarrow \text{ supernova} \rightarrow \text{stella di neutroni}$$

$$m > 5 m_{\odot} \rightarrow \text{supernova} \rightarrow \text{buco nero}$$

Stella di neutroni:"supernucleo"

Pulsar - III

Parametri di una stella di neutroni:

$$m = 0.02 \div 3\ m_{\odot}$$

$$r = 6 \div 100\ \ km$$

$$\rho = 10^{13 \div 16}\ \ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

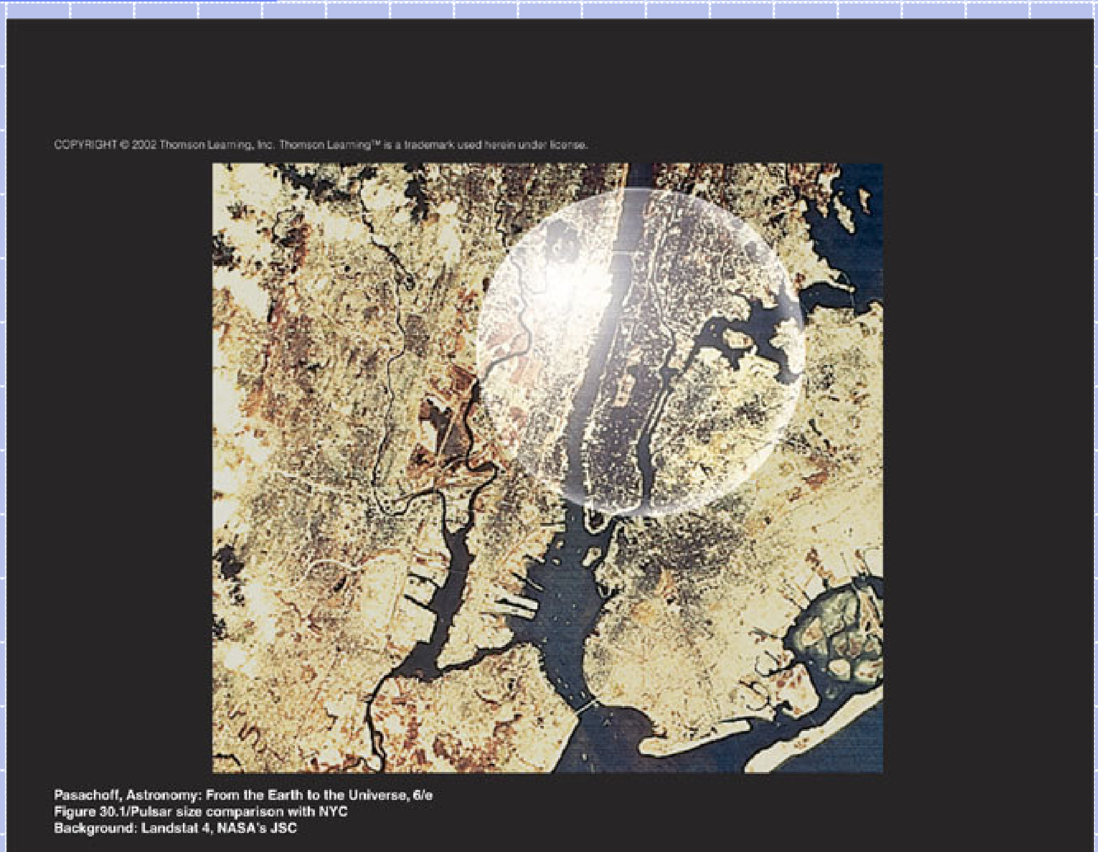
$$\text{protoni+elettroni} < \ 3\%$$

$$\text{campo magnetico}\ \ \sim 10^{8}\ \ \mathrm{T}$$

$$\text{velocita' angolare}\ \ \sim 10^{2}\ \ \mathrm{rad\ s^{-1}}$$

Neutronizzazione, densita’,c.magnetico, mom. angolare: conseguenza del collasso $R \rightarrow R\ 10^{-5}$!

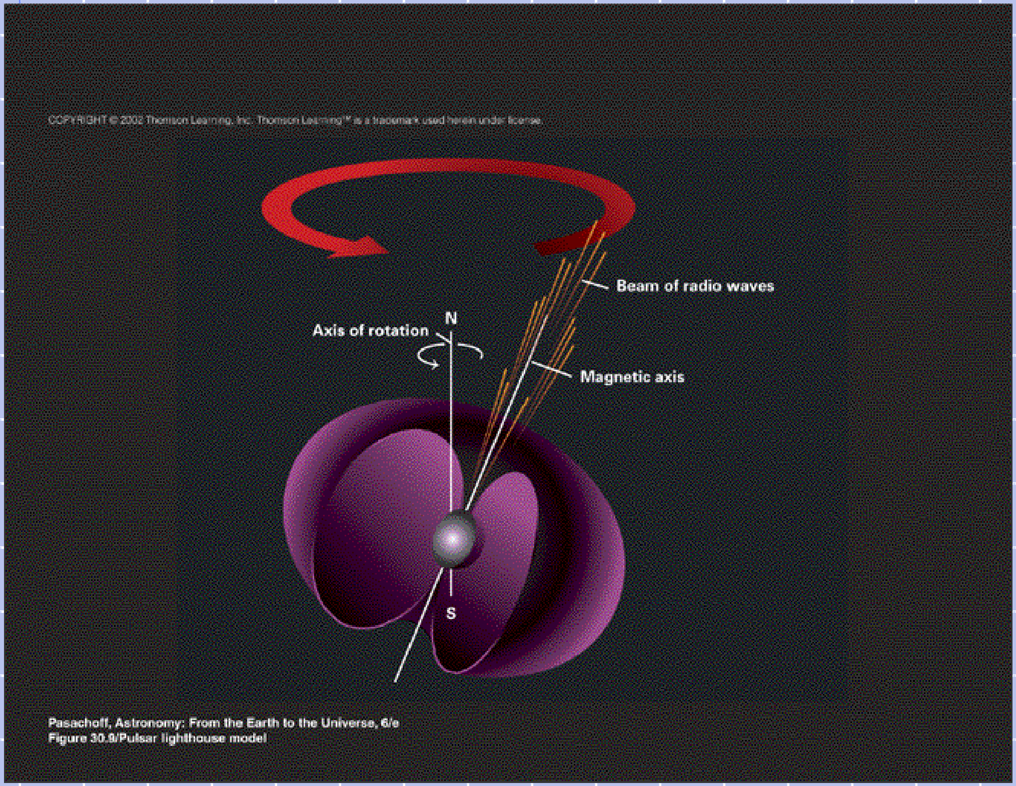
Pulsar - IV



New York e una stella di neutroni

Pulsar - V

Modello a rotatore obliquo:



Scomposizione lungo l'asse di rotazione

$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\perp + \boldsymbol{\mu}_\parallel$

$\boldsymbol{\mu}_\parallel$ non varia nel tempo $\rightarrow$ non irraggia

$\boldsymbol{\mu}_\perp$ ruota $\rightarrow$ irraggia