Elettrodinamica Classica

Onde, Radiazione, Propagazione

VIII – Propagazione nei mezzi anisotropi

Polarizzazione lineare - I

La piu' semplice soluzione periodica alla eq. di Maxwell: onde piane

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{i(\mathbf{k} \bullet \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{0}} e^{i(\mathbf{k} \bullet \mathbf{r} - \omega t)}$$

$\mathbf{E_0}$, $\mathbf{H_0}$ vettori *costanti*: **E,k** definiscono il *piano di polarizzazione* dell'onda

$\rightarrow$Il vettore **E** vibra sempre nella stessa direzione

Polarizzazione lineare - II

Sovrapponendo due onde piane, che si propagano nella stessa direzione:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}1} e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}2} e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}$$

Queste onde sono *in fase* (←la loro fase e' la stessa).
La risultante e':

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{R}} = \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}1} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}2}\right) e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}$$

il cui piano di vibrazione e' ancora costante

Polarizzazione ellittica - I

Come prima, si possono sovrapporre due onde piane, orientate nella stessa direzione, ma *con fase diversa*

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}1} e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t+\varphi_1)}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}2} e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t+\varphi_2)}$$

L'onda risultante e':

$$\tilde{\mathbf{E}}_R = \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}1} e^{i\varphi_1} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}2} e^{i\varphi_2}\right) e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}$$

Il campo elettrico risultante e' la parte reale di $\boldsymbol{E_R}$:

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{\mathbf{E}}_R\right) = \mathrm{Re}\left[\left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}1} e^{i\varphi_1} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}2} e^{i\varphi_2}\right) e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}\right]$$

Polarizzazione ellittica - II

Il calcolo della parte reale da':

$$\mathbf{E_R} =$$

$$\mathbf{E_{01}}\left(\cos\varphi_1\cos\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)-\sin\varphi_1\sin\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)\right)+$$

$$+\mathbf{E_{02}}\left(\cos\varphi_2\cos\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)-\sin\varphi_2\sin\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)\right)$$

$$=\left(\mathbf{E_{01}}\cos\varphi_1+\mathbf{E_{02}}\cos\varphi_2\right)\cos\underbrace{\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)}_{\alpha}-$$

$$-\left(\mathbf{E_{01}}\sin\varphi_1+\mathbf{E_{02}}\sin\varphi_2\right)\sin\underbrace{\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t\right)}_{\alpha}$$

$$=\mathbf{E_{01}}\left(\cos\varphi_1\cos\alpha-\sin\varphi_1\sin\alpha\right)+\mathbf{E_{02}}\left(\cos\varphi_2\cos\alpha-\sin\varphi_2\sin\alpha\right)$$

$$=\mathbf{E_{01}}\cos\left(\varphi_1+\alpha\right)+\mathbf{E_{02}}\cos\left(\varphi_2+\alpha\right)$$

Polarizzazione ellittica - III

Questa espressione mostra che il vettore $\boldsymbol{E_R}$ e' una combinazione lineare, con parametri funzioni di *t*, dei vettori (fissi e costanti) $\boldsymbol{E_{01}}$, $\boldsymbol{E_{02}}$

Nel caso in cui $\boldsymbol{E_{01}}$, $\boldsymbol{E_{02}}$ siano ortogonali, si puo' mostrare che $\boldsymbol{E_R}$ descrive nel tempo un'ellisse.

Nel sottocaso in cui $|\boldsymbol{E_{01}}| = |\boldsymbol{E_{02}}|$ si puo' mostrare che $\boldsymbol{E_R}$ descrive nel tempo un cerchio.

Propagazione nei cristalli

Relazioni fra i vettori elettrici per un mezzo isotropo:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

ε,μ quantita' scalari

Principale differenza rfra cristalli e mezzo isotropo:
Il vettore di Poynting e il vettore numero d'onda non sono necessariamente paralleli
Questo equivale a dire che ε,μ non sono quantita' scalari

La superficie di *n* - I

Introduciamo un vettore indice di rifrazione:

$$\mathbf{n} = \frac{c\mathbf{k}}{\omega_0}$$

Le velocita' di fase e di gruppo dell'onda sono:

$$\left|\mathbf{v}_\mathrm{f}\right| = \frac{\omega}{k}$$

$$\mathbf{v}_g = \nabla_\mathbf{k}\omega = \left(\nabla_\mathbf{n}\omega\right)\frac{c}{\omega_0}$$

Si noti che la velocita' di gruppo e' scritta in forma di vettore, perche' le sue componenti possono essere diverse

La superficie di $\boldsymbol{n}$ - II

Nello spazio dell'indice di rifrazione, il vettore $\boldsymbol{n}$, al variare della direzione, descrive una superficie (analoga a quella equipotenziale per un campo elettrico) per ogni valore di ω.
(Si ricordi che le 3 direzioni sono quelle spaziali)
$\boldsymbol{v_g}$ e' normale alla superficie in ogni punto di essa
La direzione di $\boldsymbol{v_g}$ e' quella del vettore di Poynting (direzione del flusso di energia), visto che l'energia e' trasportata alla velocita' di gruppo. Si noti:

$\rightarrow$Per un mezzo isotropo la superficie e' una sfera

Onde in un mezzo - I

Consideriamo solo onde armoniche. Allora:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \nabla = i\mathbf{k}$$

Questo permette di trascrivere come segue le eq. di Maxwell in un mezzo non magnetico ($\mu=\mu_0$):

$$\nabla\bullet\mathbf{B} = 0 \rightarrow i\mathbf{k}\bullet\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\bullet\mathbf{D} = 0 \rightarrow i\mathbf{k}\bullet\mathbf{D} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow i\mathbf{k}\times\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}$$

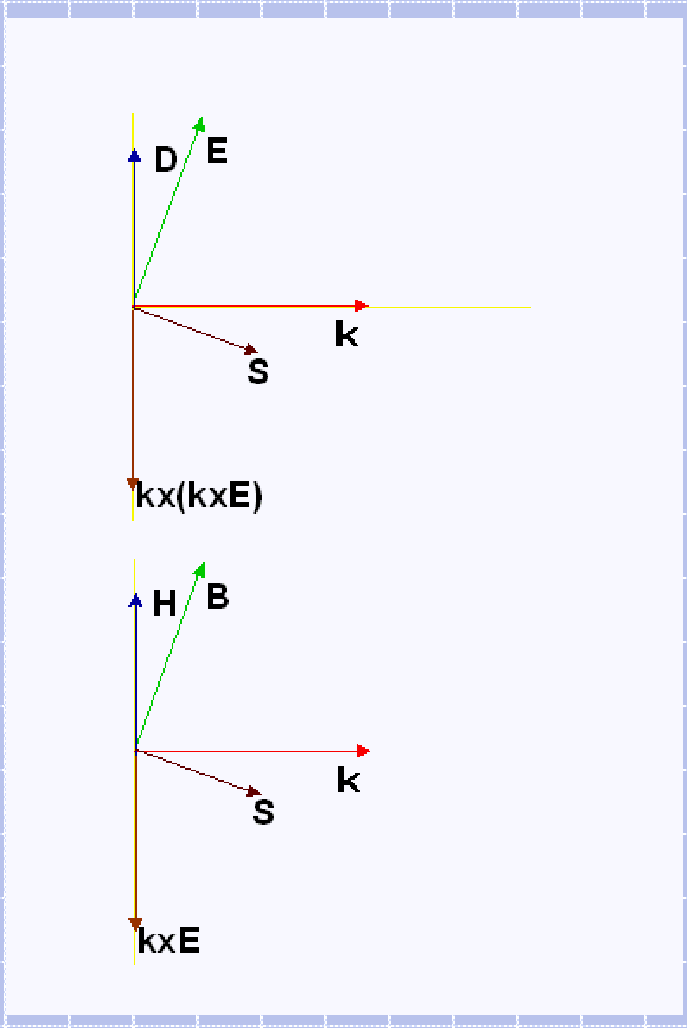
$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow i\mathbf{k}\times\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}$$

Onde in un mezzo - II

Osservazione:
D e ***B*** sono $\perp$ ***k***
E $\perp$ ***B***, ***H*** $\perp$ ***D***, ***B*** // ***H***
$\mathbf{S}=(1/\mu_0)(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$
Cerchiamo la relazione geometrica fra ***E***, ***D***, ***k***

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})=\mu_0\omega(\mathbf{k}\times\mathbf{H})=-\mu_0\omega^2\mathbf{D}$$

Questo significa che ***D*** e' costretto ad essere complanare a ***k***,***E*** qualunque sia ω :
non tutte le direzioni sono possibili



Onde in un mezzo - III

Riassumendo:
In un mezzo, non magnetico, in generale anisotropo:

B e' $//$ ***H***
E non e' generalmente $//$ ***D***
E,D,k sono tuttavia complanari

La relazione fra D ed E implica che la quantita' ε_r, o ε, non e' piu' un semplice scalare

Tensore dielettrico - I

Relazione generica fra ***E*** e ***D***:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La matrice si puo' diagonalizzare ($\leftarrow$trovare un sistema di assi in cui la matrice sia diagonale - in esso $D_i // E_i$ $i=1,2,3$):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Tensore dielettrico - II

Quindi la costante dielettrica non e' in genere uno scalare ma una quantita' piu' complicata: un *tensore* (Generalizzazione del concetto di vettore, basato su una estensione delle proprieta' di trasformazione per rotazioni)

Classificazione dei mezzi:

Cristalli biassici (meno simmetrici): $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$
Cristalli uniassici (piu' simmetrici): $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$
Mezzi isotropi: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

Ellissoide degli indici - I

Scrittura matriciale di un ellissoide:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\to (x,y,x)\begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=1$$

Quando ε e′ diagonale:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\to\mathbf{E}=\varepsilon^{-1}\mathbf{D},\quad \varepsilon^{-1}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Ellissoide degli indici - II

Si puo' scrivere:

$$\mathbf{D}\bullet\mathbf{E} = \mathbf{D}\bullet\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{D}\right)$$

La relazione

$$\mathbf{D}\bullet\mathbf{E} = 1$$

dunque rappresenta un ellissoide, nello spazio dei vettori spostamento elettrico ***D***. Semiassi:

$$a = \sqrt{\varepsilon_1}, b = \sqrt{\varepsilon_2}, c = \sqrt{\varepsilon_3} \rightarrow \text{indici di rifrazione}$$

Ellissoide degli indici - III

Quindi la relazione fra ***E*** e ***D*** e' tale che, per ognuna delle 3 componenti cartesiane di ***D***, l'indice di rifrazione e' in linea di principio diverso
Quindi:

*Per un'onda che si propaga in un mezzo anisotropo, la velocita' di propagazione dipende dalla direzione del vettore spotamento elettrico **D** (non dalla direzione di propagazione)*