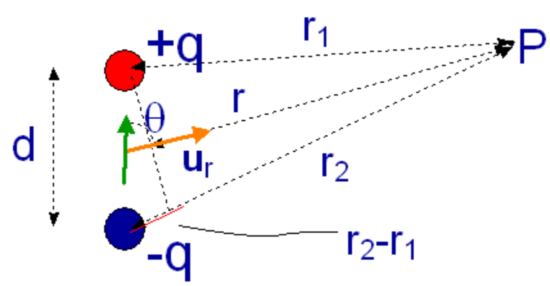
Potenziali e campi di dipoli elettrici e magnetici

Si vuole mostrare come si puo’ trovare l’andamento del campo elettrico e di quello magnetico, nel limite di grandi distanze, per il caso di un dipolo elettrico e di un dipolo magnetico.

<u>Dipolo elettrico</u>

Schematizziamo il dipolo approssimato come costituito da due cariche puntiformi $+q$ e $-q$, poste a una distanza d l’una dall’altra.



1) Potenziale elettrostatico

Usando il principio di sovrapposizione, e nel limite di distanze grandi rispetto a d:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta_1}{r^2}$$

Introducendo il momento di dipolo elettrico:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

$$\rightarrow V(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

2) Campo elettrostatico

Dalla definizione

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(p_x x + p_y y + p_z z\right)\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(p_x x + p_y y + p_z z\right)3x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x r^2 - 3x\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_x}{r^3} - 3\frac{x}{r^5}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) = -E_x$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_y}{r^3} - 3\frac{y}{r^5}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) = -E_y$$

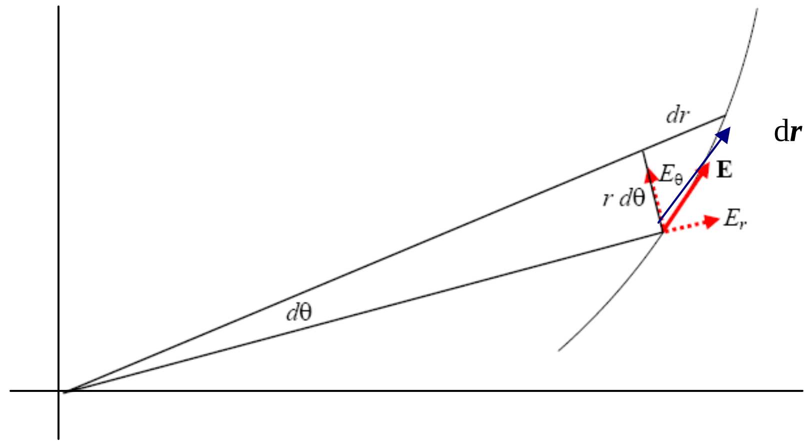
$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_z}{r^3} - 3\frac{z}{r^5}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) = -E_z$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\mathbf{r}\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]$$

Note:

a) Il vettore ***E*,** essendo una loro combinazione lineare, sta nel piano individuato dai vettori ***p*** ed ***r***: quindi al variare di ***r*** possiede simmetria assiale attorno al vettore ***p*** e non ha componenti ortogonali al piano di cui sopra

b) Linee di campo: considerando il piano *xz* (equivalente a ogni altro piano ruotato attorno all'asse *z*, lungo il quale sia orientato il dipolo), il campo E in un dato punto ha una componente radiale E_r e una trasversale E_θ



La curva indicata e' una linea di campo di ***E*** se in un suo punto generico ***E*** le e' tangente:

$$\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r} \to \frac{E_z}{E_x} = \frac{dz}{dx}$$

Quindi l'equazione differenziale delle linee di forza nel piano *xz* e':

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dz}{E_z} \to \frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x}$$

$$\to \frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{3z(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \dfrac{p_z}{r^3}}{\dfrac{3x(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \dfrac{p_x}{r^3}} = \frac{\dfrac{3z(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2 p_z}{r^5}}{\dfrac{3x(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2 p_x}{r^5}} = \frac{3z(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2 p_z}{3x(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2 p_x}$$

Esprimendo x e z in termini di r e θ:

$$\left.\begin{array}{l} z = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta \end{array}\right\} \to \frac{dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta}{dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{3\sin\theta\cos\theta}$$

Sviluppando l'algebra:

$$\rightarrow \frac{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{3\sin\theta\cos\theta}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta = \frac{3\cos^2\theta - 1}{3\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\left[\cos\theta - \sin\theta\frac{3\cos^2\theta - 1}{3\sin\theta\cos\theta}\right] - r\sin\theta = r\cos\theta\frac{3\cos^2\theta - 1}{3\sin\theta\cos\theta}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\left[\cos\theta - \frac{3\cos^2\theta - 1}{3\cos\theta}\right] - r\sin\theta = r\frac{3\cos^2\theta - 1}{3\sin\theta}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\left[\frac{3\cos^2\theta - 3\cos^2\theta + 1}{3\cos\theta}\right] - r\sin\theta = r\frac{3\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta}{3\sin\theta}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\left[\frac{1}{3\cos\theta}\right] = r\frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta}{3\sin\theta} + r\sin\theta$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\left[\frac{1}{3\cos\theta}\right] = r\frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 3\sin^2\theta}{3\sin\theta} = 2r\frac{1}{3\sin\theta}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta}\left[\frac{1}{\cos\theta}\right] = 2r\frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta d\theta$$

Equazione differenziale a variabili separabili: la soluzione da' la funzione $r=r(\theta)$, che rappresenta l'andamento delle linee di campo in coordinate polari

$$\frac{1}{2}\ln r = \ln(\sin\theta) + C$$

$$\rightarrow \ln r = 2\ln(\sin\theta) + C = \ln(\sin^2\theta) + C$$

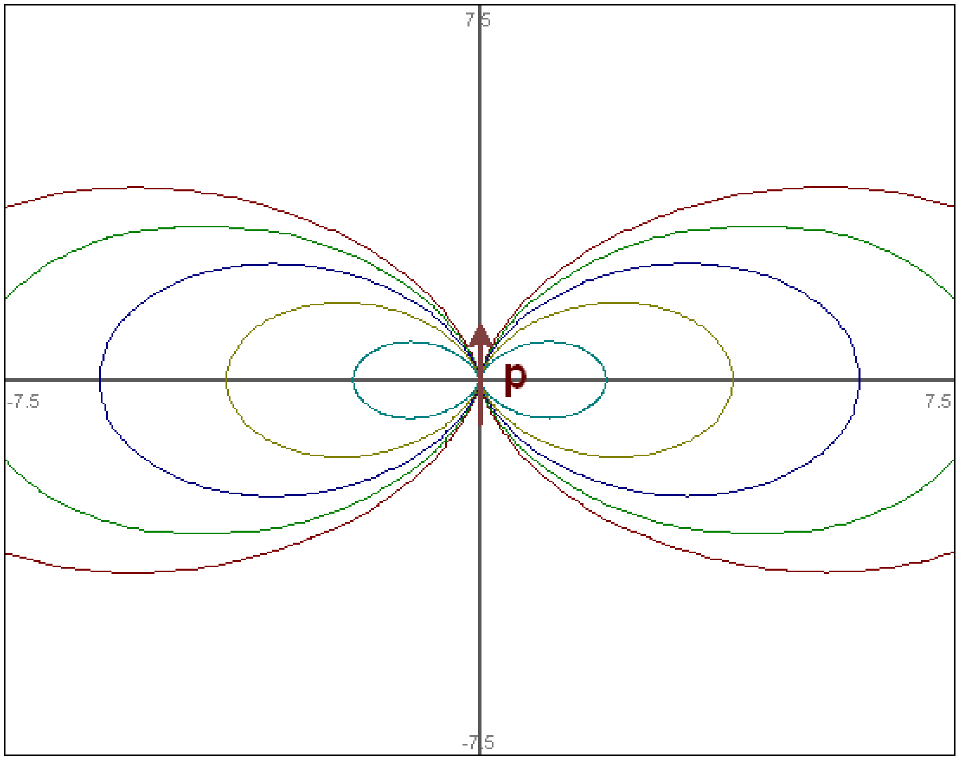
$$\rightarrow \ln r = \ln(\sin^2\theta) + \ln A, \quad C = \ln A$$

$$\rightarrow \ln r = \ln(A\sin^2\theta)$$

Prendendo l'esponenziale dei due membri:

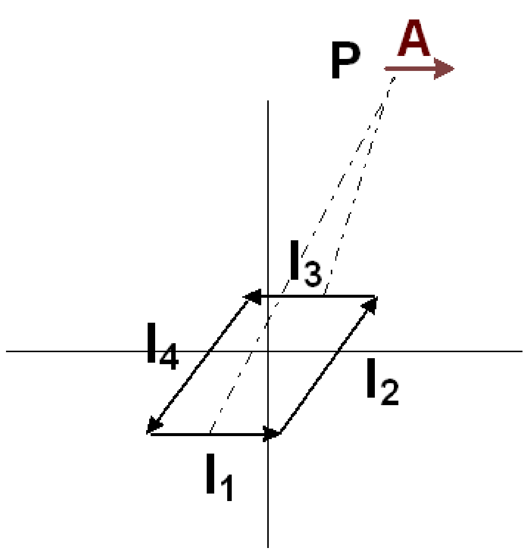
$$\rightarrow r = A\sin^2\theta$$

Grafico polare della funzione (= linee di campo di $\boldsymbol{E}$):



Dipolo magnetico

Schematizziamo la situazione nel modo seguente:



Consideriamo quindi una piccola spira quadrata, percorsa da una corrente i

1) Potenziale vettore

Occorre sommare i quattro contributi che vengono dai quattro segmenti rettilinei della spira: approssimando, nel limite di P distante dalla spira, le distanze dal punto P degli elementi di ogni lato a quella del punto centrale del lato stesso, si ha:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[\frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_3}{r_3} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} \right]$$

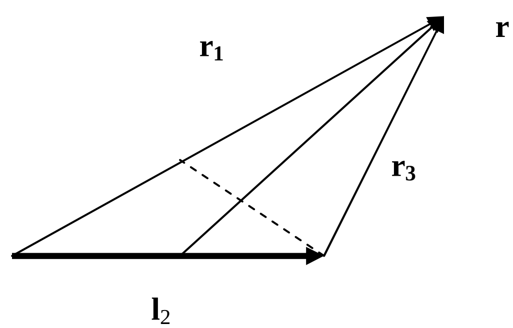
$$\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_3$$

$$\mathbf{l}_2 = -\mathbf{l}_4$$

$$\rightarrow \frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_3}{r_3} = \mathbf{l}_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right) = \mathbf{l}_1 \frac{r_3 - r_1}{r_1 r_3}$$

$$\rightarrow \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} = \mathbf{l}_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \mathbf{l}_2 \frac{r_4 - r_2}{r_2 r_4}$$

Si consideri la figura seguente, per il calcolo delle differenze a numeratore:



Dalla geometria si ha, con:

$$\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_3 \approx \mathbf{r} \gg \mathbf{l}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{l}_2$$
$$|\mathbf{r}_1|^2 = |\mathbf{r}_3 + \mathbf{l}_2|^2 = |\mathbf{r}_3|^2 + |\mathbf{l}_2|^2 + 2(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_2)$$
$$\rightarrow r_1^2 = r_3^2 + l_2^2 + 2(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_2) \approx r_3^2 + 2(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_2)$$
$$\rightarrow r_3^2 - r_1^2 = (r_3 - r_1)(r_3 + r_1) \approx -2(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_2)$$
$$\rightarrow r_3 - r_1 \approx -2\frac{(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_2)}{2r} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_2}{r}$$
$$r_3 - r_1 \approx -\frac{\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}}{r}$$
$$r_4 - r_2 \approx \frac{\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}}{r}$$

Quindi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[\frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_3}{r_3} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} \right]$$
$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} \left[\mathbf{l}_2(\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{l}_1(\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}) \right]$$

Identita' vettoriale (non dimostrata):

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$
$$\rightarrow \mathbf{l}_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1) - \mathbf{l}_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_2) = \mathbf{r} \times (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1) = (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \times \mathbf{r}$$

$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \mathbf{S}$ area orientata delimitata dalla spira

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\mathbf{S} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$\boldsymbol{\mu} = i\mathbf{S}$ momento di dipolo magnetico della spira

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

2) Campo magnetostatico

Troviamo il campo B dal potenziale vettore:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\underbrace{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{a}} \times \underbrace{\frac{\mathbf{r}}{r^3}}_{\mathbf{b}} \right)$$
$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Identita' vettoriale (non dimostrata):

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a})$$

Calcoliamo i diversi termini:

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{\mu} = 0, \quad \boldsymbol{\mu} \text{ costante}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \left(\mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{r^3 - x3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - x3r^2 x r^{-1}}{r^6} = \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \quad \mathbf{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^3} = \frac{-y3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = -\frac{3xy}{r^5} \quad \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r^3} = -\frac{3xz}{r^5} \quad \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3} = \frac{r^3 - x3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - x3r^2 x r^{-1}}{r^6} = \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} = -\frac{3xy}{r^5} \quad \mathbf{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} = \frac{-y3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \quad \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r^3} = -\frac{3yz}{r^5} \quad \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3} = -\frac{3xz}{r^5} \quad \mathbf{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r^3} = -\frac{3yz}{r^5} \quad \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \quad \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$=\left(\mu_x\frac{1}{r^3}-\mu_x\frac{3x^2}{r^5}-\mu_y\frac{3xy}{r^5}-\mu_z\frac{3xz}{r^5}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

$$+\left(\mu_y\frac{1}{r^3}-\mu_y\frac{3y^2}{r^5}-\mu_x\frac{3xy}{r^5}-\mu_z\frac{3yz}{r^5}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$+\left(\mu_z\frac{1}{r^3}-\mu_z\frac{3z^2}{r^5}-\mu_x\frac{3xz}{r^5}-\mu_y\frac{3yz}{r^5}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}-3x\mu_x\frac{\mathbf{r}}{r^5}-3y\mu_y\frac{\mathbf{r}}{r^5}-3z\mu_z\frac{\mathbf{r}}{r^5}$$

$$=\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}-3\frac{(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})}{r^5}$$

$$\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})=\boldsymbol{\mu}\left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$$

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}=\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

$$\rightarrow\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{3}{r^3}-\frac{3r^2}{r^5}=0$$

$$\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})=\frac{\mathbf{r}}{r^3}(\nabla\cdot\boldsymbol{\mu})=0$$

Quindi:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r}}{r^3}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}-3\frac{(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\right)$$

Poiche’ la dipendenza da distanza e angolo e’ la stessa di quella del dipolo elettrico, si ottengono le stesse linee di campo e proprieta’ del vettore ***E*** dipolo elettrico.