

## Il problema generale dell'elettrostatica

*Il problema viene brevemente discusso, senza alcuna pretesa di rigore o di completezza, solo per introdurre alcuni concetti utili, per far capire come si possono risolvere molti problemi pratici, e per l'interesse matematico*

*Generalita'*

Esso puo' essere posto nella seguente forma: trovare il potenziale elettrostatico in una prefissata regione spaziale, eventualmente infinita, note *la distribuzione di carica*. Ricordare che, una volta trovato il potenziale, il campo si ottiene dal gradiente.

Ricordiamo le relazioni piu' importanti:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\rightarrow \nabla^2 V = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V(x, y, z) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'ultima e' nota come *equazione di Poisson*: e' una equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del II ordine, non omogenea. E' bene notare che ad ogni diversa funzione densita' di carica  $\rho(x,y,z)$  corrisponde una diversa equazione di Poisson, con un diverso insieme di soluzioni: quindi la denominazione *Equazione di Poisson* e' di fatto generica. Nelle regioni di spazio in cui  $\rho = 0$ , vale l'equazione omogenea

$$\nabla^2 V = 0$$

nota come *Equazione di Laplace*.

Un modo per nulla rigoroso, e anzi alquanto discutibile, ma relativamente intuitivo, di considerare un'eq. differenziale alle derivate parziali e' quello di immaginarla equivalente a un sistema di infinite (di fatto, un'infinita' continua) di eq. differenziali ordinarie: in questo modo risulta abbastanza plausibile che la soluzione generale di un'eq. del II ordine dipenda da due *funzioni arbitrarie* (ossia, da due infinite' continue di costanti arbitrarie). Poiche' dipende da due funzioni arbitrarie, normalmente la soluzione generale non e' normalmente di grande interesse pratico.

Trovare una *soluzione particolare* di un'eq. differenziale alle derivate parziali richiede che siano specificate le *condizioni al contorno*: fissando le condizioni al contorno la soluzione generale si particolarizza ad ogni data situazione. Esse possono consistere nel dare il valore del potenziale  $V$ , oppure quello del gradiente di  $V$  - quindi del campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ , sulla frontiera della regione considerata. L'insieme dell'eq. differenziale e delle condizioni al contorno si chiama *problema al contorno*.

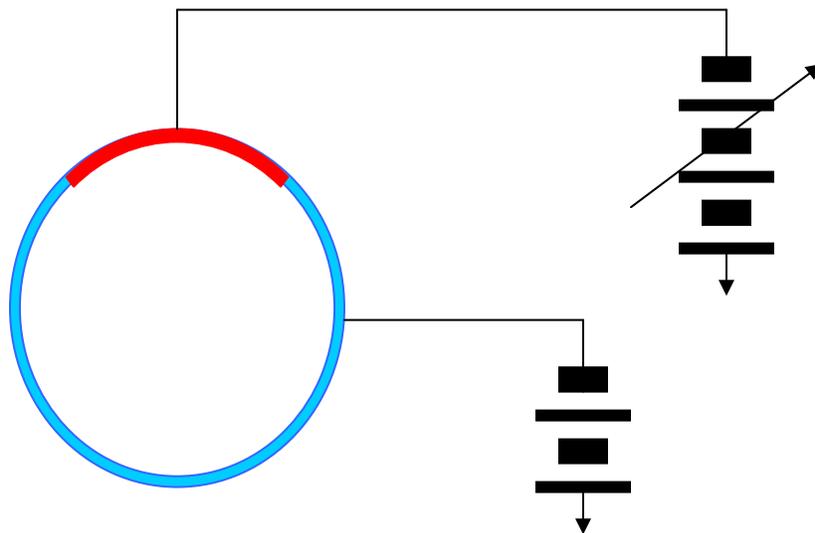
Il problema matematico cosi' definito e' noto come *problema di Cauchy*; i sottocasi in cui sono dati il potenziale o il campo sulla frontiera sono noti come *problema di Dirichlet*

e *problema di Neumann*; se sono dati potenziale su una parte della frontiera e il campo sul resto, il problema e' di tipo misto.

### *Esistenza e unicita'*

Sfortunatamente, non esistono metodi di risoluzione generali, applicabili a tutti i tipi di problemi al contorno: nel caso dell'eq. di Poisson e di Laplace ci troviamo di fronte a problemi al contorno chiamati *di tipo ellittico*, per i quali si possono tuttavia stabilire alcuni risultati generali.

Un primo risultato che si dimostra per i problemi di tipo ellittico e' che le condizioni al contorno appropriate sono solo quelle riportate nei sottocasi citati sopra, purché la frontiera sulla quale sono dati potenziale e/o campo consista in *una superficie chiusa* (notare: la superficie chiusa puo' anche trovarsi, parzialmente o interamente, all'infinito). In particolare, non sono accettabili problemi al contorno del tipo detto *di Cauchy*, nelle quali siano specificati sulla frontiera sia il potenziale sia il campo, per evidenti ragioni fisiche (non si possono fissare indipendentemente potenziale e campo su una superficie data, perché noto l'uno e' noto l'altro); ne' problemi del tipo di Dirichlet o Neumann nei quali la frontiera sia una superficie aperta (fissare p.es. il potenziale solo su una parte di superficie chiusa, senza specificarne il valore sul resto, non fissa univocamente il potenziale stesso nel resto del volume. Si pensi, per fissare le idee, a un cilindro metallico indefinito, dal quale sia stata isolata una 'fetta' longitudinale come in figura:



Le due parti del cilindro sono isolate: fissare il potenziale della prima delle due non stabilisce univocamente il potenziale stesso nell'interno del volume, perché si puo' variarlo semplicemente cambiando il potenziale della seconda). Se viceversa il cilindro non e' suddiviso, il potenziale del cilindro determina univocamente quello della zona interna.

Nei casi citati sopra, gli unici di interesse fisico, vale un secondo risultato generale: un *teorema di esistenza e unicità*, detto di *Cauchy-Kowalewskaya*, stabilisce che, se le condizioni al contorno sono fissate da funzioni analitiche (essenzialmente: infinitamente derivabili), il problema ammette sempre soluzione e che questa è unica: quindi, se in qualche modo si trova una soluzione, questa è la soluzione.

Un terzo risultato generale per i problemi di tipo ellittico omogenei (v. eq. di Laplace) è che le soluzioni (chiamate *funzioni armoniche*) hanno proprietà di analiticità, e per esse vale il *teorema di massimo/minimo*: gli estremi delle soluzioni devono trovarsi sulla frontiera della regione in cui esse sono definite. In particolare, se una funzione armonica è definita su una regione illimitata e va a zero all'infinito, essa è identicamente nulla.

### *La soluzione fondamentale dell'equazione di Poisson*

Fra le infinite possibili situazioni, conviene inizialmente considerare quella che dà luogo alla soluzione talvolta chiamata la *soluzione fondamentale* dell'eq. di Poisson, ossia la soluzione corrispondente ad una *densità di carica unitaria, puntiforme, posizionata genericamente in  $\mathbf{r}'$* :

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

(Per le proprietà della funzione  $\delta$  di Dirac, v. corso di Metodi)

In analogia con il caso delle eq. differenziali ordinarie, la soluzione del problema non omogeneo è la somma della soluzione del problema omogeneo associato e di una soluzione particolare del problema non omogeneo:

$$V(\mathbf{r}) = V_{part}(\mathbf{r}) + V^{om}(\mathbf{r})$$

$$\begin{cases} \nabla^2 V_{part}(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 V^{om}(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

Il problema non omogeneo/omogeneo, come al solito, risulta completamente definito solo quando sono specificate le condizioni al contorno..

#### *a) Condizioni al contorno all' $\infty$*

Nel caso della soluzione fondamentale, le condizioni al contorno più semplici possono essere espresse richiedendo solo che il potenziale vada a zero a distanza  $\rightarrow \infty$ ; si trova così la soluzione particolare

$$V_{part}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dimostrazione:

$$\int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r} = \int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{u} \right) d^3\mathbf{u} = \int_V \nabla \cdot \left[ \nabla \left( \frac{1}{u} \right) \right] d^3\mathbf{u}$$

Teorema della divergenza:  $V$  vol.sferico di raggio  $R$ , racchiuso da  $S$

$$\int_V \nabla \cdot \left[ \nabla \left( \frac{1}{u} \right) \right] d^3\mathbf{u} = \int_S \left[ \nabla \left( \frac{1}{u} \right) \right] \cdot d\mathbf{A} = \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{u} \right) \hat{\mathbf{u}} \right] \cdot d\mathbf{A} = \int_S \left( -\frac{1}{u^2} \right) \hat{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\int_S \left( -\frac{1}{u^2} \right) \hat{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{4\pi R^2}{u^2}$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_S \left( -\frac{1}{u^2} \right) \hat{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A} = \begin{cases} 0 & \text{se } u \neq R \\ -4\pi & \text{se } u = R \end{cases}$$

$$\rightarrow \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv -4\pi \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 4\pi \epsilon_0 \nabla^2 V_{part}$$

$$\rightarrow V_{part}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

E' immediato riconoscere che essa coincide con il potenziale coulombiano. La soluzione fondamentale per il problema al contorno specificato si trova aggiungendo la soluzione dell'eq. di Laplace appropriata alle condizioni al contorno citate prima:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + V^{om}(\mathbf{r})$$

In considerazione del risultato generale ricordato sopra, la soluzione dell'eq. omogenea in tutto lo spazio, con la condizione al contorno di andare a zero all'infinito, e' pero' identicamente nulla, quindi:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

b) *Condizioni al contorno qualsiasi*

Il problema al contorno brevemente descritto sopra risulta particolarmente semplice da trattare; in generale, pero', le condizioni al contorno possono essere piu' complicate. Allo scopo di generalizzare il piu' possibile il risultato precedente, risulta particolarmente utile introdurre il concetto di *funzione di Green* per l'eq. di Poisson, che non e' altro che la soluzione fondamentale di ogni dato problema al contorno: si parla quindi piu' correttamente di *classe di funzioni di Green*. Poiche' le condizioni al contorno possono

essere quelle di Dirichlet o quelle di Neumann, avremo una classe di funzioni di Green per ognuna delle due classi di problemi al contorno. Quando la soluzione viene cercata all'interno di una regione limitata  $R$ , come accade normalmente nei casi di interesse, potremo scrivere la funzione di Green appropriata alle condizioni al contorno,  $G_{D,N}$ , come somma della funzione di Green dello spazio libero,  $G_0$ , e di una funzione di Green nella regione limitata,  $G_R$ :

$$G_{D,N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underbrace{G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{=\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} + \underbrace{G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{=V_{D,N}^{om}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}$$

dove la soluzione dell'eq. omogenea è quella dell'eq. di Laplace con le condizioni al contorno del problema. È evidente come il problema di trovare la soluzione fondamentale dell'eq. di Poisson per ogni dato problema al contorno venga spostato a quello di trovare la soluzione dell'eq. di Laplace per quelle condizioni al contorno.

### *Equazione di Poisson: caso generale*

Cosa accade nel caso generale, quando cioè la distribuzione di carica è più generale di quella corrispondente a una carica puntiforme unitaria? Si può dimostrare che in ogni caso la soluzione si può scrivere come somma di contributi coulombiani. Se la regione  $U$  contenente la carica è limitata, si dimostra che l'unica soluzione è

$$V(\mathbf{r}) = \int_U \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int_U \rho(\mathbf{r}') \underbrace{G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{=\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} + \underbrace{G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{=V_{D,N}^{om}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}$$

Infatti:

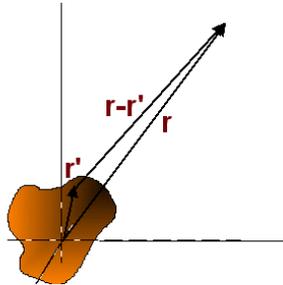
$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\mathbf{r}) &= \nabla^2 \left[ \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \underbrace{\nabla^2}_{\substack{\text{der. rispetto} \\ \text{a } \mathbf{r}, \mathbf{r}' = \text{cost}}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Il problema generale dell'elettrostatica viene quindi ricondotto al calcolo di un integrale di volume e alla soluzione di un problema al contorno per l'eq. di Laplace. Nella pratica, si possono incontrare casi (poco frequenti, in verità) in cui è nota la densità di carica di volume, e le condizioni al contorno sono quelle all'infinito: sarebbe p.es. il caso del potenziale elettrostatico generato da una molecola. In questo caso, compare ovviamente solo il primo termine. Alternativamente, può capitare il caso (molto più frequente) in cui si hanno condizioni al contorno specificate dal valore del potenziale su un insieme di superficie conduttrici, senza che ci sia presenza di cariche di volume. In questo secondo caso, compare naturalmente solo il secondo termine. In generale, ci saranno entrambi i contributi.

[Va ricordato che la presenza di dielettrici in un campo esterno comporta la presenza di cariche di polarizzazione, che effettivamente si possono ritenere localizzate sulle superficie dei dielettrici stessi; esse devono venire incluse nella distribuzione di carica di volume che contribuisce al potenziale. In generale, il problema generale dell'elettrostatica in presenza di dielettrici puo' venire affrontato in diversi modi equivalenti, sui quali non ci soffermiamo]

### *Sviluppo in serie di multipoli*

L'integrale di volume che compare nella formula data sopra non e', di solito, facile da calcolare: spesso si deve quindi ricorrere a qualche tipo di approssimazione. Si puo' accennare a come il problema possa essere affrontato nel caso, frequente, in cui la distribuzione di carica sia limitata a una zona dal volume finito



Se ci si trova nelle condizioni di dover calcolare il potenziale  $V$  in punti molto distanti dal volume carico, si puo' sviluppare in serie secondo la formula di Newton per il binomio:

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{-1/2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right)$$

Quindi:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\rightarrow dV(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{r} \left[ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} \left( 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 r^2 \right) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots \right]$$

essendo  $\theta$  l'angolo fra i vettori  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . I coefficienti delle potenze crescenti di  $r'/r$  sono polinomi nella variabile  $x = \cos \theta$ , noti come *polinomi di Legendre*  $P_n(\cos \theta)$ . Essendo per ipotesi la distribuzione limitata nello spazio, a distanza sufficientemente grande la successione  $(r'/r)^n$  tende a 0 per  $n \rightarrow \infty$ , e ci si può limitare a considerare solo i primi termini. Si può quindi scrivere compattamente lo sviluppo del potenziale in termini dei momenti di multipolo della distribuzione di carica di volume:

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

$$\rightarrow V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') r'^n P_n(\cos \theta) d^3\mathbf{r}'}_{\text{momento di multipolo di ordine } n}$$

I primi momenti di multipolo sono:

$$\int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = q \quad \text{carica totale}$$

$$\int \rho(\mathbf{r}') r' P_1(\cos \theta) d^3\mathbf{r}' = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}' = \left( \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \text{mom. di dipolo}$$

$$\int \rho(\mathbf{r}') r'^2 P_2(\cos \theta) d^3\mathbf{r}' = \text{mom. di quadrupolo}$$

### *Problema dell'elettrostatica in presenza di conduttori*

L'altro elemento che compare nella soluzione del problema al contorno generale e' la soluzione dell'eq. di Laplace corrispondente:

$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

in presenza di opportune condizioni al contorno. Come accennato sopra, esse possono consistere nel dare il valore del potenziale  $V$ , oppure quello del gradiente di  $V$  – quindi del campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ , sulla frontiera della regione considerata. Si noti che, in vista della relazione, valida alla superficie di ogni conduttore:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

specificare il campo locale sui conduttori equivale a specificare la densità di carica locale.

a) *Separazione delle variabili*

L'eq. di Laplace e' *separabile* in diversi sistemi di coordinate: in altre parole, e' possibile trovare soluzioni della forma

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad \text{coord. cartesiane}$$

$$V(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \quad \text{coord. cilindriche}$$

$$V(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad \text{coord. sferiche}$$

Si noti: non tutte le soluzioni sono di questo tipo! Anzi, l'insieme delle soluzioni a variabili separate e' un sottoinsieme piccolissimo dell'insieme totale. Basta considerare il potenziale coulombiano, che e' del tipo indicato in coordinate sferiche, ma non in coordinate cartesiane o cilindriche. Tuttavia, esiste un insieme (infinito) di soluzioni base del tipo sopra descritto, per ogni tipo di coordinate, tale che *qualsiasi* soluzione e' esprimibile come serie nelle suddette funzioni base.

Le soluzioni a variabili separate quindi sono interessanti; esse si possono trovare seguendo uno schema ingegnoso, che viene qui sommariamente indicato per il caso delle coordinate cartesiane.

Nella soluzione cercata, ognuna delle tre funzioni  $X, Y, Z$  dipende solo da una coordinata. Possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \rightarrow YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Dividendo per  $XYZ$ :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Ognuno dei tre termini dipende percio', per ipotesi, da *una sola* coordinata. Sorprendentemente, questo implica che ogni termine deve essere *una costante*. Se questo sembra poco convincente, si provi a ragionare cosi':

*Il II e il III termine non dipendono da x: quindi al variare di x restano costanti. Siccome la somma dei 3 termini fa sempre 0 per tutti i punti (x,y,z), anche il I termine deve essere costante. Stesso ragionamento per il II e il III termine..*

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = c_1 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = c_2, & c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = c_3 \end{cases}$$

In questo modo, l'eq. alle derivate parziali viene ridotta a un sistema di 3 eq. differenziali ordinarie, dipendente da 3 *costanti di separazione* (di cui solo 2 indipendenti), il cui significato si comprenderà fra poco: in tutta generalità, esse sono costanti complesse, ma l'algebra è più semplice se le si assume come reali, positive o negative a seconda dello specifico problema. Assumendo, a titolo di esempio:

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha^2 > 0 \\ c_2 &= \beta^2 > 0 \\ c_3 &= \gamma^2 = -(\alpha^2 + \beta^2) < 0 \end{aligned}$$

Si trova:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \beta^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + (\alpha^2 + \beta^2) Z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} X(x) &= Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \\ Y(y) &= Ce^{\beta y} + De^{-\beta y} \\ Z(z) &= Ee^{i\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}z} + Fe^{-i\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}z} \end{aligned}$$

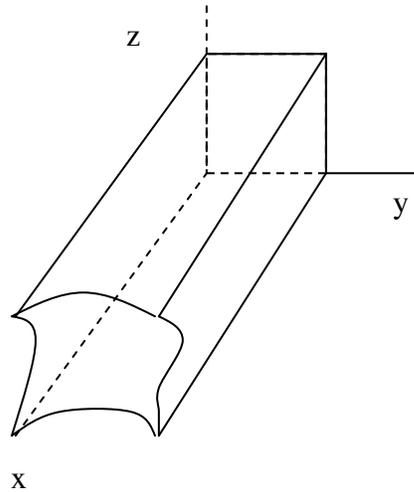
Come si vede:

$A, B, C, D, E, F$  sono costanti arbitrarie nella soluzione generale a variabili separate

Le costanti di separazione  $\alpha, \beta, \gamma$  non sono fissate nella soluzione generale a variabili separate

Entrambi gli insiemi di costanti vengono fissati dalle condizioni al contorno: sia le costanti  $A, B, C, D, E, F$ , sia le costanti  $\alpha, \beta, \gamma$ , a seconda dei casi, possono essere definite univocamente o no.

Probabilmente, il meccanismo si capisce meglio attraverso un esempio.



Una conduttoria metallica semi-infinita ha sezione quadrata di lato  $a$ . Le quattro facce laterali della conduttoria sono a potenziale zero; la faccia quadrata all'estremità della conduttoria è isolata e mantenuta a potenziale costante  $V_0$ . Trovare il potenziale all'interno della conduttoria.

Condizioni al contorno:

$$V = 0 \quad y = 0$$

$$V = 0 \quad y = a$$

$$V = 0 \quad z = 0$$

$$V = 0 \quad z = a$$

$$V = V_0 \quad x = 0$$

$$V = 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}x} + Be^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}x}$$

$$Y(y) = Ce^{i\alpha y} + De^{-i\alpha y}$$

$$Z(z) = Ee^{i\beta z} + Fe^{-i\beta z}$$

$$\rightarrow A = 0$$

$$C + D = Ce^{i\alpha a} + De^{-i\alpha a} = 0 \rightarrow C = -D \rightarrow C2 \sin \alpha a = 0 \rightarrow \alpha a = n\pi \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$$

$$E + F = Ee^{i\beta a} + Fe^{-i\beta a} = 0 \rightarrow E = -F \rightarrow \beta = \frac{m\pi}{a}$$

$$\rightarrow V_{nm}(x, y, z) = K_{nm} e^{-\frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2} x} \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{m\pi z}{a}$$

Significato: le soluzioni a variabili separate costituiscono un insieme doppiamente infinito, i cui elementi (discreti) sono etichettati dai due numeri interi  $n, m$  e dalla costante arbitraria non specificata  $K_{nm}$ .

Data la linearità dell'eq. di Laplace, ogni combinazione lineare di questi elementi è anch'essa soluzione dell'equazione con le date condizioni al contorno. Quindi in generale:

$$V(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} e^{-\frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2} x} \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{m\pi z}{a}$$

è una soluzione del problema.

Possiamo tentare di determinare le costanti arbitrarie  $K_{nm}$  tramite la condizione al contorno ancora non usata:

$$V(0, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} = V_0$$

Come procedere?

Si usa la proprietà di *ortogonalità* delle funzioni *sin* e *cos* sull'intervallo unitario

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n'\pi y}{a} dy = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ \frac{a}{2} & n = n' \end{cases}, \text{ simile per } m, m'$$

Moltiplicando i due membri per  $\sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{m'\pi z}{a}$ :

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} \right) \sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{m'\pi z}{a} = V_0 \sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{m'\pi z}{a}$$

$$\rightarrow \int_0^a \int_0^a \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} \right) \sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{m'\pi z}{a} dy dz = \int_0^a \int_0^a V_0 \sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{m'\pi z}{a} dy dz$$

$$\int_0^a \sin \frac{n'\pi y}{a} dy = -\frac{a}{n'\pi} \cos \frac{n'\pi y}{a} \Big|_0^a = -\frac{a}{n'\pi} (\cos n'\pi - 1) = \begin{cases} \frac{2a}{n'\pi} & n' \text{ dispari} \\ 0 & n' \text{ pari} \end{cases}$$

$$\rightarrow K_{n'm'} \frac{a^2}{4} = \begin{cases} 0 & n' \text{ o } m' \text{ e' pari} \\ \frac{4V_0 a^2}{n'm'\pi^2} & n' \text{ e } m' \text{ sono dispari} \end{cases}$$

$$\rightarrow K_{n'm'} = \begin{cases} 0 & n' \text{ o } m' \text{ e' pari} \\ \frac{16V_0}{n'm'\pi^2} & n' \text{ e } m' \text{ sono dispari} \end{cases}$$

Quindi concludiamo:

$$V(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16V_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} e^{-\frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2n+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{a}\right)^2} x} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{a} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{a}$$

In vista del teorema di unicità, questa è anche l'unica soluzione che soddisfa equazione e condizioni al contorno.

*b) Metodo delle immagini*

Per ciò che riguarda questa e altre tecniche di soluzione, che sono piuttosto semplici da comprendere, si rinvia ai testi consigliati