Esercizi 0 – Campo gravitazionale

1. La cometa di Halley ha un periodo di rivoluzione di 76 anni, e raggiunge una distanza minima dal Sole di 0.6 UA.

    a) Calcolare la sua massima distanza dal Sole
    b) Calcolare il rapporto fra la sua en. cinetica all'afelio e quella al perielio

Usando la III legge:

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a$$
$$\rightarrow r_{\max} = 2a - r_{\min}$$
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{2GM} a^3, \text{ costante per tutti i pianeti}$$
$$\rightarrow a = \left(\frac{2GM}{4\pi^2} T^2\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\rightarrow r_{\max} = 2\left(\frac{2GM}{4\pi^2} T^2\right)^{\frac{1}{3}} - r_{\min}$$
$$\rightarrow r_{\max} = 2\left(\frac{2GM}{4\pi^2} T^2\right)^{\frac{1}{3}} - r_{\min} = 2\left(\frac{2GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{2}{3}} - r_{\min} = 2 \cdot 76^{\frac{2}{3}}\ UA - 0.6\ UA$$
$$\rightarrow r_{\max} \sim 20 \cdot 2\ UA - 0.6\ UA \sim 35.3\ UA$$

Usando la conservazione del momento angolare:

$$L = mvr = \text{cost}$$
$$\rightarrow mv_{af} r_{af} = mv_{per} r_{per}$$
$$\rightarrow \frac{v_{af}}{v_{per}} = \frac{r_{per}}{r_{af}} \rightarrow \left(\frac{v_{af}}{v_{per}}\right)^2 = \left(\frac{r_{per}}{r_{af}}\right)^2$$
$$\rightarrow \frac{\frac{1}{2} mv_{af}^2}{\frac{1}{2} mv_{per}^2} = \left(\frac{r_{per}}{r_{af}}\right)^2 = \left(\frac{0.6}{35.3}\right)^2 \sim 2.89\ 10^{-4}$$

2. I quattro satelliti di Giove scoperti da Galileo sono i seguenti:

Satellite	**Raggio dell'orbita Mkm**	**Periodo d**
Io	0.422	1.77
Europa	0.671	3.55
Ganimede	1.070	7.16
Callisto	1.880	16.7

a) Verificare che i dati soddisfano la III legge di Kepler
b) Determinare la massa di Giove

Suggerimento: costruire un foglio EXCEL con i dati e verificare che la costante di proporzionalita' fra T^2 e a^3 e' la stessa per tutti e 4 i satelliti; da essa determinare M_G

3. Viene scavato un tunnel attraverso il centro della Terra fra Italia e Nuova Zelanda

a) Determinare il potenziale gravitazionale in funzione del raggio
b) Determinare il tipo di moto di un grave lasciato cadere nel tunnel dalla superficie della Terra, e il suo periodo

$$g(r) = -\frac{GM}{R^3} r$$

$$U(r) = -\int_0^r \left(-\frac{GM}{R^3} r'\right) dr' = \frac{GM}{R^3} r^2$$

$$F(r) = -\frac{GMm}{R^3} r$$

$$F = m\frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^3} r$$

$$\rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \underbrace{\frac{GM}{R^3}}_{\omega^2} r = 0$$

Eq. differenziale dei moti armonici

$$\rightarrow r(t) = R\cos\omega t$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$\rightarrow T = 6.28\sqrt{\frac{\left(6.410^6\right)^3}{6.6710^{-11}610^{24}}} = 6.28\sqrt{\frac{2.6210^{20}}{410^{14}}} = 6.28\cdot 0.81\cdot 10^3 s = 5.08\ 10^3 s$$

4. Parametri di Urano:

$R_U = 4\ R_T$
$g_U = 0.92\ g_T$

a) Trovare la velocita' di fuga da Urano

$$v_U = \sqrt{\frac{2GM_U}{R_U}}$$

$$g_U = G\frac{M_U}{R_U^2} = 0.92\ g_T$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_U = \sqrt{\dfrac{2GM_U}{4R_T}} \\ M_U = 0.92\ \dfrac{g_T}{G} R_U^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_U = \sqrt{\frac{2G}{4R_T} 0.92\ \frac{g_T}{G} R_U^2} = \sqrt{\frac{2G}{4R_T} 0.92\ \frac{g_T}{G} 16R_T^2}$$

$$\rightarrow v_U = \sqrt{7.36 g_T R_T}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_T R_T} \rightarrow v_U = \sqrt{7.36 g_T R_T} = \sqrt{3.68\ \ 2g_T R_T}$$

$$\rightarrow v_U = \sqrt{3.68} v_T \sim 1.92 v_T \sim 21.5\ \ km/s$$