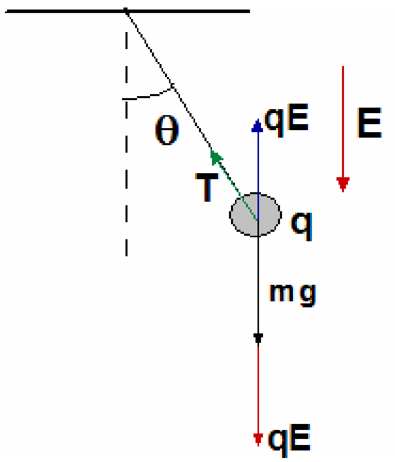
Esercizi 1 – Forza e campo

1. Un campo elettrico verticale e' applicato in una regione in cui si trova un pendolo, costituito da una pallina con carica *q* sospesa a un filo di lunghezza *L*. Trovare la variazione nel periodo del pendolo quando il campo e' diretto:

    a. Verso l'alto
    b. Verso il basso



Il diagramma mostra le forze agenti sulla pallina. La componente non equilibrata, che da' origine al moto periodico, si scrive (i segni + e – si riferiscono a campo verso il basso e verso l'alto, rispettivamente):

$$F_c = -(mg \pm qE)\sin\theta \simeq -(mg \pm qE)\theta \quad \text{se } \theta \ll 1$$

$$\rightarrow mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mg \pm qE)\theta$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mg \pm qE}{mL}\right)\theta = 0$$

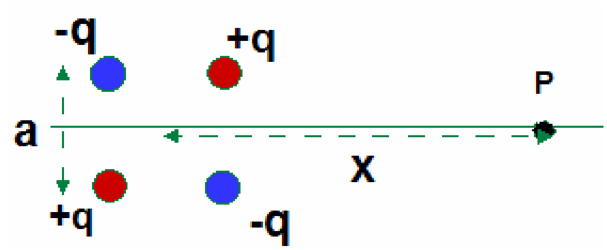
Questa e' l'equazione del moto armonico; la frequenza angolare del moto e' data da:

$$\omega^2 = \left(\frac{mg \pm qE}{mL}\right)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g \pm qE/m}}$$

Cosa succede se $g \leq qE/m$?

2. Un tipo di quadripolo elettrico e' costituito da 4 cariche poste ai vertici di un quadrato di lato a. Trovare il campo elettrostatico a distanza $x>>a$ sull'asse del quadripolo



Il campo e' quello di 2 dipoli spostati della distanza +a/2 e –a/2. Il primo da' sui punti dell'asse x solo la componente y diretta verso il basso, il secondo diretta verso l'alto.
Contributo del primo dipolo:

$$E_y^1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x-a/2)^2+(a/2)^2}\frac{a/2}{\left((x-a/2)^2+(a/2)^2\right)^{1/2}}\right)$$

Contributo del secondo dipolo:

$$E_y^2 = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x+a/2)^2+(a/2)^2}\frac{a/2}{\left((x+a/2)^2+(a/2)^2\right)^{1/2}}\right)$$

Campo totale:

$$E = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\left((x-a/2)^2+(a/2)^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{\left((x+a/2)^2+(a/2)^2\right)^{3/2}}\right)$$

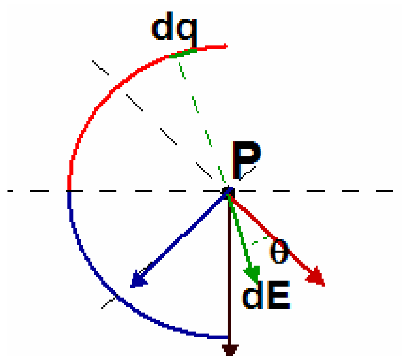
Per $x>>a$ si trascurano i termini $(a/2)^2$, si tengono solo i termini di ordine x^3 e x^2 nei cubi dei binomi, e si sviluppano in serie di Taylor al I ordine in $a/2x$ le frazioni che rimangono

$$E \approx \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x-a/2)^3}+\frac{1}{(x+a/2)^3}\right) \approx \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x^3-3x^2\,a/2)}+\frac{1}{(x^3+3x^2\,a/2)}\right)$$

$$E \approx \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left(-\frac{1}{(x-3a/2)}+\frac{1}{(x+3a/2)}\right) \approx \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left(-\frac{1}{x}\left(1+3\frac{a}{2x}\right)+\frac{1}{x}\left(1-3\frac{a}{2x}\right)\right)$$

$$E \approx \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\left(-\left(1+3\frac{a}{2x}\right)+\left(1-3\frac{a}{2x}\right)\right) = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\left(-3\frac{a}{2x}-3\frac{a}{2x}\right) = -\frac{6qa^2}{8\pi\varepsilon_0 x^4}$$

3. Una sottile bacchetta isolante ha forma di arco semicircolare di raggio R. Sulla meta' superiore e' distribuita uniforme mente una carica +q, e su quella inferiore una carica –q. Trovare il campo nel centro della semicirconferenza.



Per il principio di sovrapposizione, il campo totale e' la somma vettoriale dei contributi dalle cariche positive e negative.
Cariche positive: il campo risultante deve essere allineato con la bisettrice del quadrante in alto (freccia rossa). Il contributo elementare della carica dq e':

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

e il contributo totale

$$E = \int dE = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

$$dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$$

$$\lambda = \frac{q}{(\pi/2)R}$$

$$\to E = \int dE = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\cos\theta$$

$$\to E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\theta\Big|_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sqrt{2}$$

Cariche negative: risultato uguale in modulo e direzione come la freccia blu
Quindi: campo totale diretto verso il basso, con modulo:

$$E_{tot} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{R} = \frac{1}{\pi^2\varepsilon_0}\frac{2Q}{R^2}$$