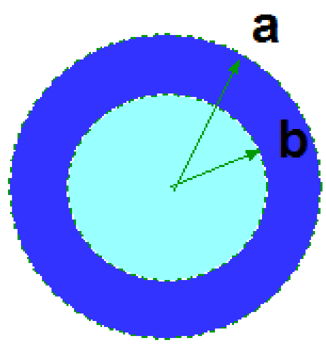
Esercizi 2 – Legge di Gauss

1. Un involucro sferico isolante ha raggi interno ed esterno *a* e *b*, ed e' caricato con densita' uniforme ρ. Disegnare il diagramma di *E* in funzione di *r*

La geometria e' mostrata nella figura:



Usiamo il teorema di Gauss, utilizzando come superficie gaussiane sfere di raggio *r* concentriche alla distribuzione di carica. A seconda del valore di *r* troveremo, per il teorema di Gauss:

$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} \quad \text{r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \quad \text{b>r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = 0 \quad \text{r<b}$$

Si ha:

$$Q_{tot} = \rho V_{guscio} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi b^3\right) = \frac{4}{3}\pi\rho\left(a^3 - b^3\right)$$
$$q(r) = \rho V_{\text{fra } b \text{ e raggio } r} = \rho\frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - b^3\right)$$

Quindi:

$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho\left(a^3 - b^3\right)}{\varepsilon_0} \quad \text{r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - b^3\right)}{\varepsilon_0} \quad \text{b>r>a}$$
$$\Phi(E) = E4\pi r^2 = 0 \quad \text{r<b}$$

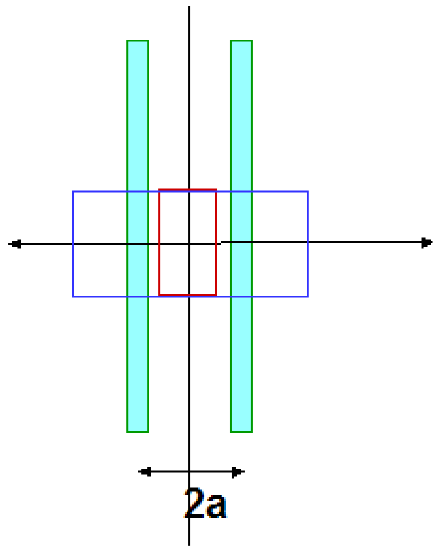
e

$$E = \frac{\rho}{3r^2\varepsilon_0}\left(a^3 - b^3\right) \qquad \text{r>a}$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{b^3}{r^2}\right) \qquad \text{b>r>a}$$

$$E = 0 \qquad \text{r<b}$$

2. Due piani infiniti e paralleli a distanza *2a* sono carichi con densita' superficiale s>0. Determinare il campo elettrico nelle tre regioni spaziali definite dai piani



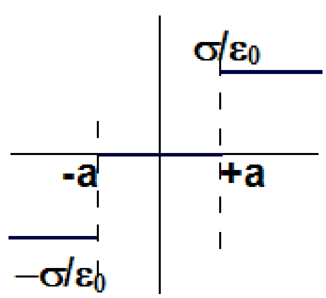
Possiamo applicare il teorema di Gauss usando come superficie gaussiana un cilindro centrato nell'origine, con altezza *2x* e area di base *A*, come indicato. Il campo elettrico sara' ortogonale ai piani, per ragioni di simmetria: allora il flusso totale di ***E*** e' solo attraverso le basi, e si puo' scrivere:

$$\Phi(E) = 2 \cdot AE$$

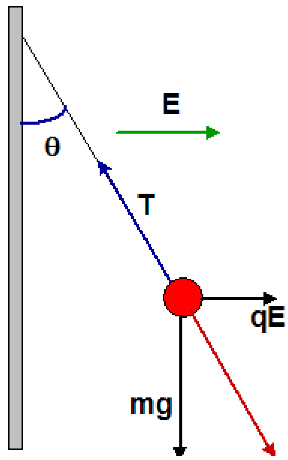
$x < a$ (cilindro rosso): $\Phi(E) = 2 \cdot AE = 0 \quad \rightarrow E = 0$

$x > a$ (cilindro blu): $\Phi(E) = 2 \cdot AE = \frac{2\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

L'andamento del campo elettrico in funzione di *x* e' il seguente:



3. Su una piccola sfera isolante di massa *m=1.12 mg* e' presente una carica *q = 19.7 nC*. Essa e' appesa al soffitto con un filo di massa trascurabile, attaccato ad una parete isolante uniformemente carica con densita' superficiale σ. Si osserva che all'equilibrio il filo forma un angolo θ=*30* gradi. Determinare σ.



Il campo della distribuzione piana, uniforme di carica e'

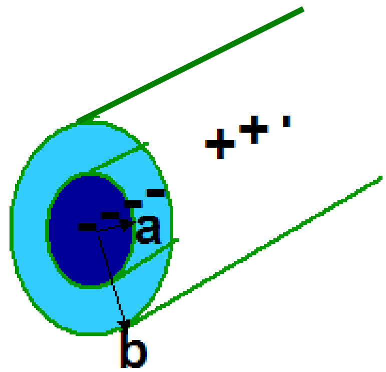
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La condizione di equilibrio richiede che la risultante della forza elettrica e di quella di gravita' sia allineata con il filo, lungo il quale agisce la tensione *T*. Quindi:

$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0}$$
$$\rightarrow \sigma = \frac{2mg\varepsilon_0}{q}\tan\theta = 5.12 \quad nC/m^2$$

4. Due lunghi cilindri metallici coassiali hanno raggio *a* e *b* rispettivamente. Sui cilindri e' presente una densita' lineare di carica λ, uguale e opposta.

   a. Determinare il campo elettrico in funzione della distanza dall'asse dei cilindri



Usiamo il teorema di Gauss, scegliendo come superficie gaussiana un cilindro di raggio *r* e lunghezza *L*, coassiale ai due cilindri carichi. Per simmetria, nell'approssimazione di cilindro infinito il campo non puo' avere componenti longitudinali, ma solo radiali (come al solito, il contributo longitudinale degli elementi di carica da un lato e' compensato da quello di altrettanti elementi dall'altro); quindi il flusso e' solo attraverso l'area laterale della superficie gaussiana, sulla quale il modulo di E e' costante:

$$\Phi(E) = 2\pi r L E = \begin{cases} 0 & r<a \quad \text{carica contenuta zero} \\ \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0} & a<r<b \quad \text{carica negativa sul cilindro metallico interno} \\ 0 & r>b \quad \text{carica negativa + carica positiva : zero} \end{cases}$$

Quindi il campo vale 0 fuori dal volume delimitato dai due cilindri, mentre vale

$E = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ entro il volume stesso

b. Consideriamo un positrone (ossia, un elettrone positivo: stessa massa ma carica opposta a quella dell'elettrone) che si muove all'interno del campo elettrico su un'orbita circolare. Calcolare la sua energia cinetica.

La forza centripeta deve essere data dalla forza elettrostatica; quindi:

$$m\frac{v^2}{r} = eE = -e\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\rightarrow en.cinetica = \frac{1}{2}mv^2 = e\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$$

5. Una carica elettrica Q di *-9.12 nC* e' uniformemente distribuita su un anello di raggio R pari a *1.48 m*, che giace nel piano yz e ha centro nell'origine. Una carica puntiforme q di *-5.93 pC* e' posizionata sull'asse x nel punto x_0*=3.07 m*. Calcolare il lavoro compiuto da un agente esterno per spostare la carica nell'origine.

Il lavoro fatto dall'agente esterno e' uguale e opposto al lavoro fatto dal campo elettrostatico; essendo quest'ultimo conservativo, il suo lavoro e' uguale alla variazione di en. potenziale cambiata di segno: Quindi:

$$L_{esterno} = -L_{campo} = -(-\Delta U) = \Delta U$$
$$\Delta U = q\Delta V = q\left(V_{finale} - V_{inziale}\right)$$

Il potenziale sull'asse si trova con il principio di sovrapposizione; assumendo uguale a 0 il potenziale all'infinito (ossia, costante arbitraria=0), il contributo di ogni elemento di anello (che e' coulombiano) e' dato da:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

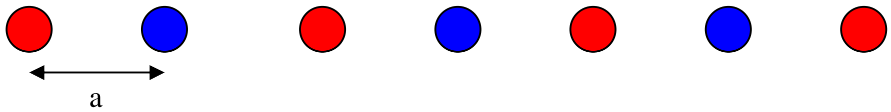
Tutti gli elementi dell'anello sono a uguale distanza dai punti sull'asse, per cui:

$$V = \int_{anello} dV = \int_{anello} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Quindi:

$$\Delta U = q\left(V_{finale} - V_{inziale}\right)$$
$$V_{finale} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2}}$$
$$V_{inziale} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x_0^2}}$$
$$\rightarrow L_{ezterno} = \Delta U = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{Q}{\sqrt{R^2+x_0^2}}\right) \simeq 183 \ \text{ pJ}$$

5. Calcolare l'energia elettrostatica di una schiera 1-dimensionale infinita di cariche equispaziate, uguali in valore assoluto e alternate in segno



L'en. potenziale dello ione posto a coordinata *x=0* e' la somma di infiniti contributi, la cui espressione generica e':

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{+\infty} \frac{q^2 (-1)^j}{r_{0j}} = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{ja}$$

$$U_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...\right]$$

La quantita' *2[…]* si chiama *costante di Madelung* del cristallo 1-dimensionale.
Per calcolare la somma della serie (che e' la *serie armonica a segno alterno*) si puo' procedere come segue: si consideri lo sviluppo in serie di Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(x)\big|_{x=0} x + \frac{1}{2!} f''(x)\big|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)\big|_{x=0} x^3 + ...$$

Prendiamo

$$f(x) = \ln(1+x) \rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f''''(x) = -\frac{6(1+x)}{(1+x)^6} \rightarrow f''''(0) = -6$$

....

Allora:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$\rightarrow \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

$$\rightarrow U_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} 2\ln(2)$$