

Esercizi 3 – Potenziale, energia potenziale, condensatori

- Una goccia sferica di acqua su cui e' presente una carica di 32 pC ha, alla superficie, un potenziale di 512 V.
 - Qual e' il raggio della goccia?
 - Se due gocce identiche (stessa carica e stesso raggio) coalescono a formare un'unica goccia, quale sara' il potenziale della goccia formata?

Relazione fra carica e potenziale:

$$Q = CV \rightarrow C = \frac{Q}{V}$$

Capacita' di una sfera conduttrice di raggio R:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Quindi:

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow 4\pi\epsilon_0 R = \frac{Q}{V} \rightarrow R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 V} = 0.54 \text{ mm}$$

Dopo coalescenza:

$$Q \rightarrow 2Q$$

$$\text{Volume} \rightarrow 2 \text{ Volume}$$

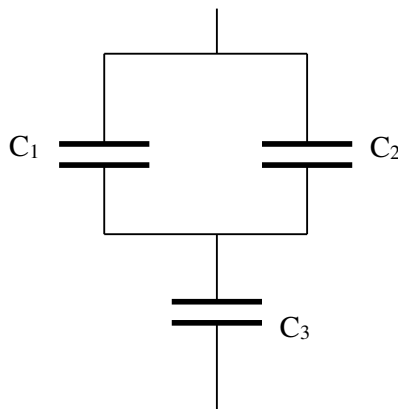
$$\text{Poiche': Volume} \propto r^3$$

$$R \rightarrow \sqrt[3]{2}R \simeq 1.26R$$

Quindi:

$$V \rightarrow V \frac{2}{1.26} \simeq V 1.59 \simeq 795 \text{ V}$$

- Calcolare la capacita' equivalente di 3 condensatori collegati come in figura



La capacita' equivalente di C_1 e C_2 , che sono in parallelo, e':

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

La capacita' C_3 e' in serie alle 2, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{123}} &= \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} \\ \rightarrow C_{123} &= \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} \\ \rightarrow C_{123} &= \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned}$$

3. Trovare la forza di attrazione fra le armature di un condensatore piano

Le cariche sull'armatura negativa sono sottoposte al campo generato da quelle dell'armatura positiva. Esso e' dato da:

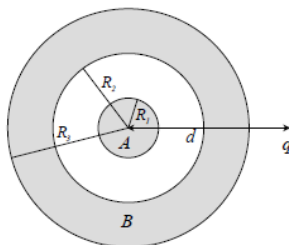
$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(-) &= \sigma_- A E_+ = \sigma_- A \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \\ \rightarrow |F(-)| &= \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Sull'armatura positiva si esercita una forza uguale e opposta.

4. Un conduttore cilindrico di raggio $R_1 = 0.5 \text{ cm}$ e altezza $h = 1 \text{ m}$ si trova all'interno di uno strato conduttore cilindrico di raggi interno $R_2 = 2 \text{ cm}$ ed esterno $R_3 = 3 \text{ cm}$, di uguale altezza h . Il conduttore A ha una carica totale $Q_A = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ ed il conduttore B carica totale Q_B . Trovare:
- La differenza di potenziale fra i conduttori
 - L'en. elettrostatica immagazzinata nello spazio fra i conduttori
 - La carica Q_e sulla superficie esterna del conduttore B, sapendo che il lavoro necessario ad allontanare di un tratto $\delta = 10^{-3} \text{ cm}$ una carica $q = 3 \cdot 10^{-12} \text{ C}$ posta a distanza $d = 10 \text{ cm}$ dall'asse dei cilindri vale $W = 6 \cdot 10^{-14} \text{ J}$
 - La carica totale Q_B sul conduttore B



Carica indotta sulla sup. interna di B: $-Q_A$

Cap. cilindrica:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\rightarrow \Delta V = \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} \approx 100 \text{ V}$$

En. immagazzinata nella capacita':

$$U_E = \frac{Q_A^2}{2C} \approx 210^{-7} \text{ J}$$

Carica su sup. esterna di B: Q_e

C. elettrico esterno:

$$E_e = \frac{Q_e}{2\pi\epsilon_0 h r}$$

$$\rightarrow V(r_2) - V(r_1) = \frac{Q_e}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

\rightarrow Lavoro della forza esterna che sposta q :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} = - \int_d^{d+\delta} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_d^{d+\delta} E dr = -\frac{qQ_e}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{d+\delta}{d} \approx -\frac{qQ_e}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{\delta}{d}, \frac{\delta}{d} \ll 1$$

$$\rightarrow Q_e = -W \frac{2\pi\epsilon_0 h d}{q\delta} \approx -1.110^{-8} \text{ C}$$

$$Q_B = Q_e - Q_A \approx -1.510^{-8} \text{ C}$$

5. Fra le armature di un condensatore piano poste a una distanza d viene inserita una lastra metallica della stessa area e di spessore δ in posizione centrale. Come varia la capacita'?

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

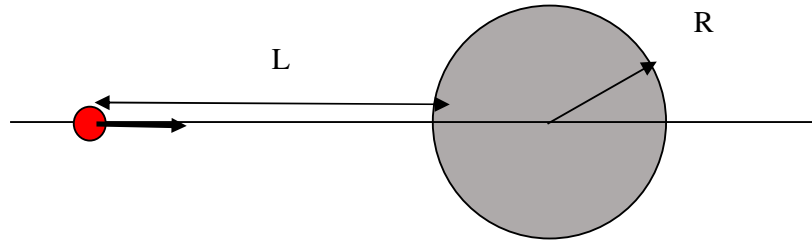
Dopo l'inserimento della lastra si ha l'equivalente di due capacita' uguali in serie

Per ognuna:

$$C' = \epsilon_0 \frac{S}{d-\delta} = \epsilon_0 \frac{2S}{2(d-\delta)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = 2 \frac{d-\delta}{\epsilon_0 2S} = \frac{d-\delta}{\epsilon_0 S} \rightarrow C_{tot} = \frac{\epsilon_0 S}{d-\delta}$$

6. In una sfera di raggio $R = 10 \text{ cm}$ e' distribuita uniformemente una carica totale $Q = 10^{-8} \text{ C}$. Una particella puntiforme di carica $q = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ e massa $m = 0.1 \text{ g}$ viene lanciata da una distanza L dal bordo della sfera, lungo un asse che passa per il centro della sfera. Calcolare il valore minimo della velocita' iniziale della particella che garantisce l'attraversamento di tutta la sfera.



Cons. energia totale per la carica q : $E_k + U_E = \text{cost}$

C. elettrico generato da Q :

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, & r < R \end{cases}, \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

v_{\min} : Corrisponde a $E_k = 0$ al centro della sfera; da quel punto in poi

il c. elettrico spinge q fuori dalla sfera

$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = W_1 + W_2$, lavoro del c. elettrico su q fuori e dentro la sfera

$$W_1 = \Delta U_1 = U_1(R) - U_2(R+L) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L} \right)$$

$$W_2 = \Delta U_2 = U_2(0) - U_2(R)$$

$$U_2(r) = -\int_0^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$

$$\rightarrow W_2 = \Delta U_2 = 0 - \left(-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} \right) = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L} \right) + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

$$\rightarrow v_{\min} \approx 11.6 \text{ ms}^{-1}$$