Esercizi 4 – Energie elettrostatica, corrente, campo magnetico

1. Un condensatore a facce piane e parallele, di capacita' C=12 pF, viene caricato collegandolo a una batteria da 100 V. Calcolare il lavoro fatto nel raddoppiare la distanza fra le piastre:
    a. Lasciando collegata la batteria
    b. Con la batteria scollegata

Il raddoppio della distanza riduce la capacita' alla meta':

$$C' = \frac{C}{2}$$

L'energia elettrostatica iniziale e':

$$U' = \frac{1}{2} C V^2$$

Quella finale e', nei due casi:

$$U_1^{''} = \frac{1}{2} C' V_1^2$$
$$U_2^{''} = \frac{1}{2} C' V_2^2$$

Nel primo caso, la tensione resta la stessa, quindi

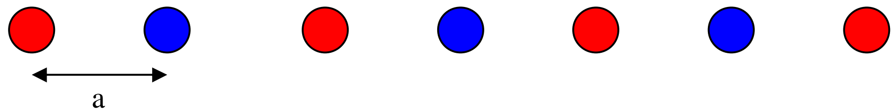
$$V_1 = V \rightarrow U_1^{''} = \frac{1}{2} C' V_1^2 = \frac{1}{2} C' V^2 = \frac{1}{4} C V^2$$
$$\rightarrow \Delta U = \frac{1}{4} C V^2 - \frac{1}{2} C V^2 = -\frac{1}{4} C V^2$$

Si noti che, essendo dimezzata la capacita' a tensione costante, la carica sul condensatore e' dimezzata: il lavoro compiuto dal campo durante l'allontanamento le piastre serve a caricare la batteria.
Nel secondo caso, la carica sul condensatore resta la stessa; allora:

$$V_2 = \frac{Q}{C'} = \frac{2Q}{C} = 2V$$
$$\rightarrow U_1^{''} = \frac{1}{2} C' V_2^2 = \frac{1}{2} C' V_2^2 = \frac{1}{4} C 4V^2 = C V^2$$
$$\rightarrow \Delta U = C V^2 - \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C V^2$$

NB: Si ricordi che l'espressione *"lavoro compiuto dal campo"* non implica che esso debba essere sempre positivo, ma serve solo a indicare quale lavoro stiamo considerando: appunto, quello del campo e non quello di chi sposta (reversibilmente) le piastre. In questo senso, come discusso a lezione, $L_{campo}>0 \rightarrow \Delta U=U_{fin}-U_{iniz}<0$ e viceversa.

2. Calcolare l'energia elettrostatica di una schiera 1-dimensionale infinita di cariche equispaziate, uguali in valore assoluto e alternate in segno



L'en. potenziale dello ione posto a coordinata $x=0$ e' la somma di infiniti contributi, la cui espressione generica e':

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{+\infty}\frac{q^2(-1)^j}{r_{0j}} = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{ja}$$

$$U_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....\right]$$

La quantita' *2[…]* si chiama *costante di Madelung* del cristallo 1-dimensionale.
Per calcolare la somma della serie (che e' la *serie armonica a segno alterno*) si puo' procedere come segue: si consideri lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(x)\big|_{x=0}x + \frac{1}{2!}f''(x)\big|_{x=0}x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)\big|_{x=0}x^3 + ...$$

Prendiamo

$$f(x) = \ln(1+x) \rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f''''(x) = -\frac{6(1+x)}{(1+x)^6} \rightarrow f''''(0) = -6$$

....

Allora:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$
$$\rightarrow \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$
$$\rightarrow U_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} 2\ln(2)$$

3. Una rotaia del tram, di acciaio, e' lunga 11 km e ha una sezione trasversale di 56 cm^2. Se la resistivita' dell'acciaio e' 3.0 10^{-7} Ωm, qual e' la resistenza della rotaia?

   Usando la formula generale:

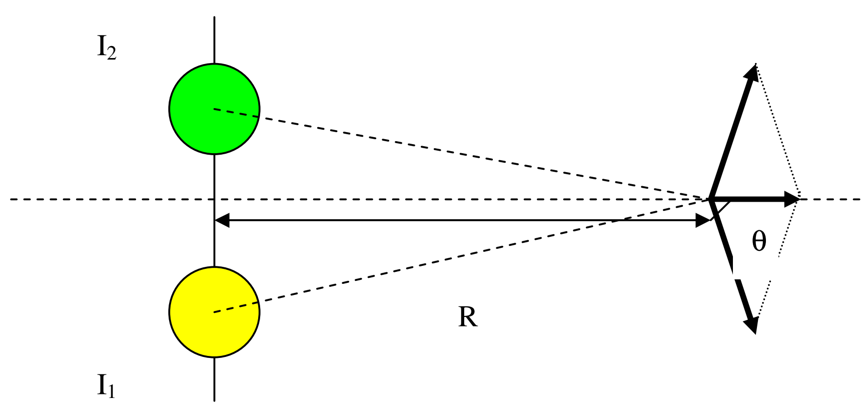
$$R = \rho \frac{l}{A} \rightarrow R = 3.0 \;\; 10^{-7} \frac{11\,10^3}{56\;10^{-4}} \approx 0.6 \;\; \Omega$$

   Si puo' osservare che la resistenza della rotaia, per quanto limitata, e' tale da sconsigliare l'uso di un motore elettrico a bassa tensione e grande corrente per il tram. Infatti, p.es. una corrente di 100 A, necessariamente scaricata a terra attraverso le ruote+rotaie, porterebbe nel caso considerato a una differenza di potenziale ai capi della rotaia

$$\Delta V = Ri = 0.6 \;\; 100 = 60 \text{ V}$$

   del tutto inaccettabile.

4. Due lunghi fili rettilinei e paralleli, posti a distanza d, sono percorsi da correnti uguali e opposte. Calcolare il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ nei punti equidistanti dai fili.



   La sola componente che sopravvive alla somma vettoriale dei due contributi al campo totale e' quella lungo l'asse. Quindi:

$$B = B_{asse} = 2B_0 \cos\theta$$

Per ognuno dei 2 fili:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\left(R^2 + d^2/4\right)^{1/2}}$$

quindi

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\left(R^2 + d^2/4\right)^{1/2}}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{\left(R^2 + d^2/4\right)}$$