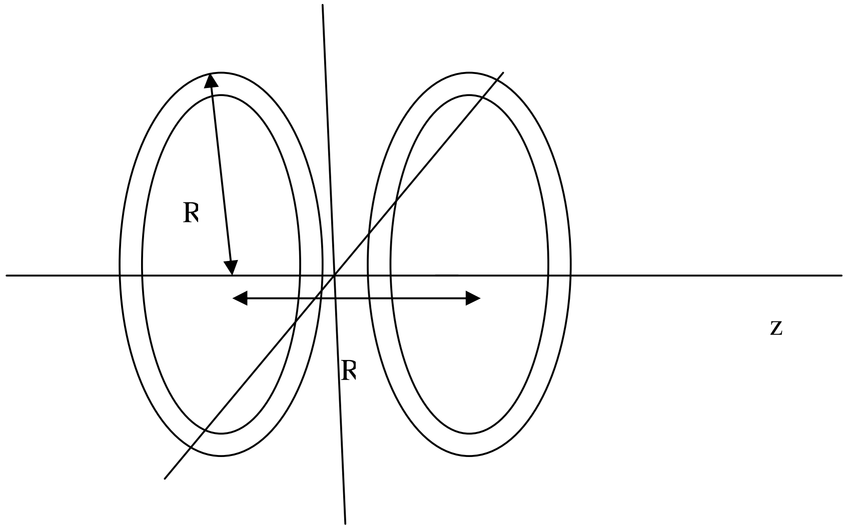
Esercizi 5 – Campo magnetico, forza su carica in moto

1. Due bobine identiche, di N spire e raggio R, sono percorse dalla stessa corrente i. Esse sono disposte coassialmente, ad una distanza uguale al loro raggio.



Bobine parallele al piano xy

Mostrare che il campo magnetico sull'asse z, intorno al centro di simmetria del sistema, e' quasi uniforme.

Il campo totale e' la risultante dei contributi delle due bobine. Ogni bobina si puo' assimilare ad una spira, quindi i rispettivi contributi si scrivono, per i punti sull'asse z:

$$B_1 = \frac{Ni\mu_0 R^2}{2} \frac{1}{\left[R^2 + \left(z + \frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$B_2 = \frac{Ni\mu_0 R^2}{2} \frac{1}{\left[R^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Quindi il campo totale sui punti dell'asse z e':

$$B = B_1 + B_2 = \frac{Ni\mu_0 R^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(z + \frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}$$

Nella regione vicina al centro di simmetria si ha:

$$z \sim 0 \rightarrow \frac{z}{R} \ll 1$$

Si puo' in generale sviluppare *B(z)* in serie di Taylor:

$$B(z) = B(0) + \left.\frac{dB}{dz}\right|_{z=0} z + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2B}{dz^2}\right|_{z=0} z^2 + ...$$

Calcoliamo le derivate nell'origine, riscrivendo B come segue:

$$B(z) = \frac{A}{R}\left\{\frac{1}{\left[1+(z/R+1/2)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1+(z/R-1/2)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$u = z/R \rightarrow B(u) = \frac{A}{R}\left\{\frac{1}{\left[1+(u+1/2)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1+(u-1/2)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\frac{dB}{du} = \frac{A}{R}\left\{\frac{3\left[1+(u+1/2)^2\right]^{1/2}(u+1/2)}{\left[1+(u+1/2)^2\right]^3} + \frac{3\left[1+(u-1/2)^2\right]^{1/2}(u-1/2)}{\left[1+(u-1/2)^2\right]^3}\right]$$

$$\rightarrow \left.\frac{dB}{du}\right|_{z=0} = \frac{A}{R}\left[\frac{3\cdot(5/4)^{1/2}\cdot 1/2}{(5/4)^3} + \frac{3\cdot(5/4)^{1/2}\cdot(-1/2)}{(5/4)^3}\right] = 0$$

$$\frac{d^2B}{du^2} = \frac{A}{R}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3\left[1+(u+1/2)^2\right]^{5/2} - 3\cdot 2(u+1/2)^2\, 5/2\left[1+(u+1/2)^2\right]^{3/2}}{\left[1+(u+1/2)^2\right]^5} + \\ + \dfrac{3\left[1+(u-1/2)^2\right]^{5/2} - 3\cdot 2(u-1/2)^2\, 5/2\left[1+(u-1/2)^2\right]^{3/2}}{\left[1+(u-1/2)^2\right]^5}\end{array}\right.$$

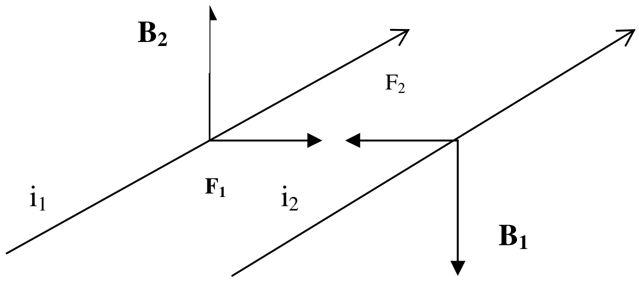
$$\rightarrow \left.\frac{d^2B}{du^2}\right|_{z=0} = \frac{A}{R}\left[\frac{3\cdot(5/4)^{5/2} - 15/4(5/4)^{3/2}}{(5/4)^5} + \frac{3\cdot(5/4)^{5/2} - 15/4(5/4)^{3/2}}{(5/4)^5}\right] = 0$$

Quindi i primi due coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor sono nulli; si puo' verificare che anche il III termine dello sviluppo ha coefficiente nullo. La dipendenza da z quindi e' del tipo

$$B(z) \simeq K_1 + K_2 (z/R)^4 \qquad z/R \ll 1$$

che mostra come il campo sia, nella zona centrale, piuttosto uniforme

2. Calcolare la forza per unita' di lunghezza fra due fili rettilinei indefiniti, paralleli, percorsi da correnti concordi



Usiamo le due leggi elementari di Laplace:

Campo generato dall'elemento di corrente 1 nei punti del filo 2:

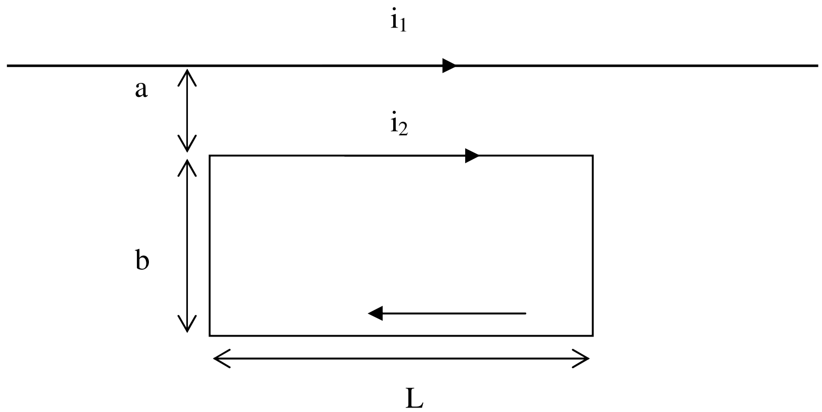
$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{d^2}$$
$$\rightarrow dB_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \frac{ds}{d^2} \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{d}$$

La direzione e' quella indicata nella figura, come conseguenza della regola della mano destra, o del cacciavite, o del cavatappi

Forza esercitata sull'elemento di corrente 2:

$$d\mathbf{F}_2 = i d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_1$$
$$\rightarrow dF_2 = i_2 ds_2 B_1$$
$$\rightarrow \frac{dF_2}{ds_2} = i_2 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d}$$

3. Una spira rettangolare percorsa da una corrente i_2, di lati b e L, e' immersa nel campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente i_1, come in figura:



Il campo generato dal filo e' quello ben noto:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

diretto perpendicolarmente al foglio; nel semipiano in cui si trova la spira esso risulta entrante nel foglio stesso.
Calcoliamo le forze agenti sui 4 lati della spira:

sui 2 lati orizzontali agiscono forze dirette, rispettivamente

verso il filo (lato superiore), di intensita'

$$F_a = i_2 L B(a) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a} i_2 L$$

in verso opposto al filo (lato inferiore), di intensita'

$$F_{a+b} = i_2 L B(a+b) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(a+b)} i_2 L < F_a$$

sui 2 lati verticali agiscono forze uguali e opposte

La risultante e' quindi una forza verticale, diretta verso il filo, di intensita':

$$F = F_a - F_{a+b} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a} i_2 L - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(a+b)} i_2 L = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right)$$

Volendo comunque calcolare la forza agente su uno dei lati verticali, si puo' procedere cosi':

l'elemento di forza e' dato dalla solita formula di Laplace; per la forza totale agente sul singolo lato:

$$
\begin{aligned}
&d\mathbf{F} = i_2 d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \\
&\rightarrow dF = i_2 drB \\
&B = \frac{\mu_o i_1}{2\pi r} \\
&\rightarrow dF = i_2 dr \frac{\mu_o i_1}{2\pi r} \\
&\rightarrow F = i_2 \frac{\mu_o i_1}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o i_1 i_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}
\end{aligned}
$$

4. Un cavo coassiale e' costituito da un conduttore cilindrico interno di raggio c, in cui scorre una corrente i, circondato da un conduttore cilindrico cavo, di raggi a (esterno) e b (interno), nel quale scorre una corrente $-i$ (ossia, uguale e opposta a quella che scorre nel conduttore interno). Calcolare il campo magnetico in funzione della distanza radiale r.

   Si puo' usare il teorema di Ampere, scegliendo come spira amperiana una circonferenza di raggio r generico nelle varie regioni radiali:

   $r<c$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i(r)$$

$$i(r) = i\frac{\pi r^2}{\pi c^2} = i\frac{r^2}{c^2}$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i \frac{r^2}{c^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi c^2}$$

   $c<r<b$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

   $b<r<a$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left[i - i(r)\right]$$

$$i(r) = i\frac{\pi\left(r^2 - b^2\right)}{\pi\left(a^2 - b^2\right)} = i\frac{\left(r^2 - b^2\right)}{\left(a^2 - b^2\right)}$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i \left[1 - \frac{\left(r^2 - b^2\right)}{\left(a^2 - b^2\right)}\right] \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left[1 - \frac{\left(r^2 - b^2\right)}{\left(a^2 - b^2\right)}\right]$$

   $b>a$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\rightarrow B 2\pi r = 0 \rightarrow B = 0$$