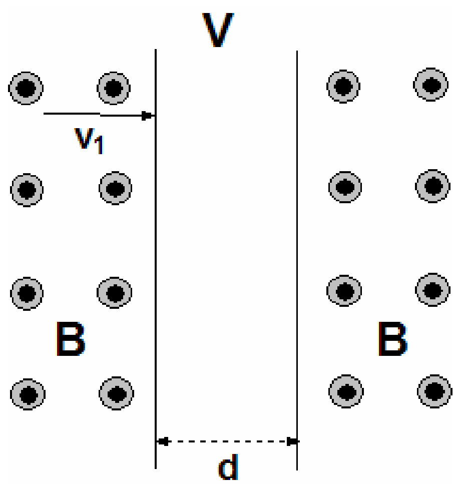
Esercizi 6 –Forza su carica in moto, momento magnetico

1. Due griglie metalliche a distanza $d = 4\ cm$, molto estese, fra le quali e' stabilita una differenza di potenziale V, separano due zone nelle quali esiste un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ uniforme, ortogonale al disegno



Un protone, con velocita' v_1, viene iniettano attraverso la prima griglia all'istante $t=0$, in direzione perpendicolare alla griglia. Dopo un tempo $t=1.22\ 10^{-7}\ s$ il protone riattraversa la griglia, nello stesso senso, a distanza $h=5.2\ cm$ dal punto di iniezione

a) Calcolare le velocita' v_1 e v_2 del protone nelle regioni in cui e' presente il campo magnetico

Il moto del protone e' uniformemente accelerato/decelerato nella zona in cui c'e' il campo elettrico, a seconda della direzione della velocita' iniziale, mentre e' un moto circolare uniforme nelle zone in cui c'e' il campo magnetico. Qualitativamente, la traiettoria e' rettilinea fra le griglie, circolare nella zona con B, di nuovo rettilinea, ma in senso opposto, fra le due griglie, e circolare nell'altra zona con B. La velocita' del protone all'ingresso e all'uscita delle zone con B e' uguale in modulo, e opposta in direzione. Quando il protone rientra nella prima zona con B, ha velocita' uguale e opposta a quella con cui e' stato iniettato, poiche' viene prima accelerato e poi decelerato dallo stesso campo elettrico
Chiamiamo v_2 la velocita' all'uscita dalla seconda griglia. Allora:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + eV = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Il tempo totale t e' la somma di 4 tempi:

$t_1 =$ tempo di attraversamento fra le griglie (andata)

$t_2 =$ tempo di una semirivoluzione nella zona con B a velocita' v2

$t_3 =$ tempo di attraversamento fra le griglie (ritorno)

$t_4 =$ tempo di una semirivoluzione nella zona con B a velocita' v_1

Valgono le relazioni:

$$t_1 = t_3 = d\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)^{-1} \quad \text{moto unif. accelerato: tempo=distanza/vel.media}$$

$$t_2 = \frac{\pi r_2}{v_2}$$

$$t_4 = \frac{\pi r_4}{v_1}$$

Circa le orbite circolari, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} ev_1 B = m\frac{v_1^2}{r_4} \rightarrow r_4 = \frac{mv_1}{eB} \\ ev_2 B = m\frac{v_2^2}{r_2} \rightarrow r_2 = \frac{mv_2}{eB} \end{aligned}\right\} \rightarrow t_2 = t_4 = \frac{\pi m}{eB}$$

Quindi:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2\cdot\frac{2d}{v_1 + v_2} + 2\cdot\frac{\pi m}{eB}$$

e complessivamente:

$$t = 2\left(\frac{2d}{v_1 + v_2} + \frac{\pi m}{eB}\right) \rightarrow \frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB} = \frac{2d}{v_1 + v_2}$$

$$\rightarrow v_2 + v_1 = \frac{2d}{\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = eV \rightarrow (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = \frac{2eV}{m}$$

$$\rightarrow v_2 - v_1 = \frac{eV\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}\right)}{md}$$

da cui

$$v_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2d}{\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}} + \frac{eV\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}\right)}{md}\right]$$

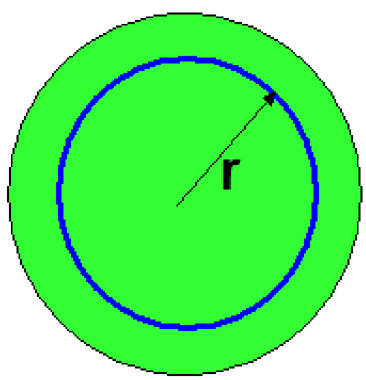
$$v_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{2d}{\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}} - \frac{eV\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}\right)}{md}\right]$$

La differenza di potenziale non e' nota, ma e' nota la distanza h fra il punto di iniezione e il punto di rientro; dalla geometria della traiettoria descritta sopra, tale distanza e':

$$h = 2r_2 - 2r_4 = 2\frac{m}{eB}\left(v_2 - v_1\right)$$
$$\rightarrow v_2 - v_1 = \frac{eBh}{2m}$$
$$\rightarrow \frac{eBh}{2m} = \frac{eV\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}\right)}{md}$$
$$\rightarrow V = \frac{Bhd}{2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi m}{eB}\right)}$$

e da questa si trovano v_1, v_2.

2. Un disco di materiale isolante di raggio R, caricato uniformemente con un carica Q, ruota intorno al suo asse con velocita' angolare ω. Qual e' il suo momento magnetico?



Immaginiamo il disco suddiviso in corone circolari di larghezza dr. La corona generica contiene la carica:

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$$

che contribuisce alla corrente totale con

$$di = \frac{dq}{T} = \sigma 2\pi r dr \frac{\omega}{2\pi}$$

Ogni corona elementare si puo' considerare una spira percorsa dalla corrente *di*, e alla quale quindi e' legato un momento magnetico

$$d\mu = diA = \sigma r dr \omega \pi r^2 = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

Il momento magnetico totale si ottiene integrando su tutto il disco:

$$\mu = \int d\mu = \int_0^R \pi\sigma\omega r^3 dr = \pi\sigma\omega \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\sigma\omega}{4} R^4$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{4} q\omega R^2$$