

Esercizi 6 – Legge di Faraday

1. Si consideri una spira alla quale sia concatenato un flusso magnetico variabile nel tempo, il cui valore a due istanti $t=0$ e t sia $\Phi(0), \Phi(t)$. Calcolare la carica totale che è fluita nella resistenza R della spira fra 0 e t .

Usiamo la legge dell'induzione di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

La corrente che circola nella spira sarà

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$
$$\rightarrow q = \int_0^t i dt = -\int_0^t \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{\Delta\Phi}{R}$$

2. Si consideri una bacchetta conduttrice di lunghezza L , che viene spinta senza attrito su dei binari orizzontali conduttori a velocità costante v . Nella regione è presente un campo magnetico B , uniforme e verticale. Assumendo

$$L=10.8 \text{ cm}, v=4.86 \text{ ms}^{-1}, B=1.18 \text{ T}$$

- a) Determinare la f.e.m. indotta nella bacchetta

Legge di Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$; nel nostro caso

$$d\Phi = BLv dt$$
$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = BLv$$
$$\rightarrow \mathcal{E} = -BLv = -0.62 \text{ V}$$

- b) Calcolare la corrente indotta, assumendo trascurabile la resistenza dei binari e uguale a 415Ω quella della bacchetta

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1.49 \text{ A}$$

- c) Che potenza viene dissipata nella bacchetta?

Legge di Joule: $P = Ri^2 = 0.92 \text{ W}$

d) Determinare la forza necessaria a mantenere la bacchetta in moto uniforme

Essendo la bacchetta percorsa da corrente in un campo magnetico esterno, su di essa agisce la forza

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \rightarrow F = iLB$$
$$\rightarrow F = \frac{BLv}{R} LB = (BL)^2 \frac{v}{R} = 0.19N$$

La forza e' parallela alla velocita', e diretta in senso opposto; quindi per mantenere la bacchetta in moto uniforme occorre esercitare una forza compensatrice uguale e opposta a F

e) Calcolare la potenza meccanica sviluppata dalla forza esterna

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (BL)^2 \frac{v}{R} v = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

Quindi la potenza meccanica e' interamente trasformata in calore Joule

3. La bacchetta dell'esercizio 2, che ha massa m , e' questa volta collegata ad un generatore di f.e.m. costante \mathcal{E} , senza che nessun'altra forza esterna intervenga

a) Verificare che la bacchetta tende ad una velocita' limite

Consideriamo la f.e.m. totale che agisce sul circuito equivalente bacchetta-binari:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}$$
$$\rightarrow i = \frac{\mathcal{E}'}{R} = \frac{\mathcal{E} - vBL}{R}$$

La corrente da' luogo ad una forza motrice

$$F = BiL = B \frac{\mathcal{E} - vBL}{R} L = \frac{B\mathcal{E}L}{R} - \frac{vB^2L^2}{R}$$
$$\rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{B\mathcal{E}L}{mR} - \frac{vB^2L^2}{mR}$$

L'accelerazione si annulla (e quindi la velocita' resta costante) quando

$$a = 0 \rightarrow \frac{B\mathcal{E}L}{mR} - \frac{vB^2L^2}{mR} = 0 \rightarrow v = \frac{\mathcal{E}}{BL}$$

b) Qual e' la corrente nella bacchetta alla velocita' limite?

Sostituendo la velocita' limite nell'espressione della corrente, si trova $i=0$. Questa e' una conseguenza dell'aver trascurato ogni attrito.

4. La solita bacchetta si muove a velocita' costante su binari orizzontali, ma questa volta il campo magnetico non e' uniforme: in effetti, esso e' fornito da un filo parallelo ai binari, a distanza a dalla prima rotaia, percorso da una corrente i_1 .

Assumendo:

$$a=10.2 \text{ mm}, v=4.86 \text{ ms}^{-1}, L=9.83 \text{ cm}, i_1=110 \text{ A}$$

a) Calcolare la f.e.m. indotta nella bacchetta

Usando la legge di Faraday:

$$d^2\Phi = Bvdt dr \rightarrow \frac{d^2\Phi}{dt} = Bvdr$$

Il campo magnetico del filo e' dato da:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

quindi il flusso totale e':

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt} = Bvdr &\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} v dr = \frac{\mu_0 i}{2\pi} v \int_a^{a+L} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \\ \rightarrow \mathcal{E} &= -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \end{aligned}$$

b) Il calcolo della corrente, potenza dissipata, etc procede esattamente come nei casi precedenti

5. Calcolare l'induttanza di due cilindri coassiali, di raggi a e b e di lunghezza $l \gg a, b$, collegati insieme ad un estremo

Il campo magnetico e' diverso da zero solo nella zona fra i due cilindri (teorema di Ampere, usando come spira amperiana una circonferenza concentrica ai cilindri); in essa

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

con andamento tangenziale alla circonferenza. Il flusso di \mathbf{B} si puo' calcolare in questo modo: si sceglie come elemento di superficie orientato una finestra con base dr a r e altezza l ; allora:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = B l dr = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

$$\rightarrow \Phi = \int_a^b d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dalla definizione di induttanza:

$$\Phi = Li \rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

L'approssimazione di l grande serve a trascurare gli effetti di bordo alle estremità dei cilindri

6. Si consideri un tratto di filo di rame (diametro = 2.5 mm; resistenza per unità di lunghezza = 3.3 Ω /km) percorso da una corrente di 10 A, distribuita in maniera uniforme.

a. Calcolare la densità di energia elettrica alla superficie del filo

Il campo elettrico nel filo è:

$$j = \sigma E \rightarrow \frac{i}{A} = \sigma E$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A} \rightarrow \frac{R}{l} = \frac{1}{\sigma A} \rightarrow \sigma = \frac{1}{A(R/l)}$$

$$\rightarrow \frac{i}{A} = \frac{1}{A(R/l)} E \rightarrow E = i \frac{R}{l}$$

la densità di energia elettrica è:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 i^2 \left(\frac{R}{l}\right)^2 = 5.1 \cdot 10^{-15} \text{ Jm}^{-3}$$

b. Calcolare la densità di energia magnetica alla superficie del filo

Il campo magnetico è:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

La densità di energia magnetica

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = 1.02 \text{ Jm}^{-3}$$