Esercizi 8 –Onde elettromagnetiche

1. La luce solare colpisce la Terra, subito fuori dalla sua atmosfera, con intensita' 1.38 kWm^{-2}.

   a. Calcolare E_0 per l'onda piana equivalente

   L'onda luminosa emessa dal Sole e' piu' simile a un'onda sferica; tuttavia, a grande distanza dalla sorgente essa puo' essere approssimata da un'onda piana.
   L'intensita' e' il modulo del vettore di Poynting dell'onda elettromagnetica; quindi si ha:

$$I = |\mathbf{S}| = \frac{1}{2\mu_0} EB = \frac{1}{2\mu_0 c} E^2$$

   L'intensita' media su un periodo vale:

$$\begin{aligned} &\langle I \rangle = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}\frac{1}{2} E_0^2 \\ &\to E_0^2 = 4\mu_0 c \langle I \rangle \to E_0 = 2\sqrt{\mu_0 c \langle I \rangle} \\ &\to E_0 = 1.4 \ \ kVm^{-1} \end{aligned}$$

   b. Calcolare B_0

   Usando la relazione universale fra E e B per un'onda elettromagnetica:

$$\begin{aligned} &B_0 = \frac{E_0}{c} \\ &\to B_0 = 4.7\ 10^{-6} \ \ T \end{aligned}$$

2. Attraverso un filo di rame (diametro 2.48 mm, resistenza per unita' di lunghezza 3 Ω/km) passa una corrente di 25 A.

   a. Calcolare il campo elettrico alla superficie del filo

   Dalla legge di Ohm microscopica:

$$\begin{aligned} &j = \sigma E \to E = \rho j = \rho \frac{i}{A} \\ &R = \rho \frac{l}{A} \to \frac{R}{l} = \frac{\rho}{A} \\ &\to E = \frac{R}{l} i \\ &E = 83 \ \ 10^{-3} \ \ Vm^{-1} \end{aligned}$$

   b. Calcolare il campo magnetico alla superficie del filo

   Dal teorema di Ampere:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$
$$B = 4\ 10^{-3}\ T$$

c. Calcolare modulo direzione e verso del vettore di Poynting alla superficie del filo

Dalla definizione:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$
$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{\mu_0} \frac{R}{l} i \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{Ri^2}{2\pi rl}$$

E e' parallelo al filo, concorde al senso della corrente; ***B*** e' diretto ortogonalmente al filo, in senso orario guardando nel senso della corrente: quindi il prodotto esterno e' radiale (diretto lungo un raggio del filo) ed entra nel filo stesso

d. Calcolare il flusso del vettore di Poynting attraverso una lunghezza *l* di filo

Data l'orientazione di ***S***, il flusso (che e' solo attraverso la superficie laterale del filo) e' dato da:

$$\Phi_{lat}(\mathbf{S}) = S 2\pi rl = Ri^2$$

Esso rappresenta l'energia trasferita per unita' di tempo al segmento di filo di lunghezza *l*. Come si puo' notare, esso coincide con la potenza Joule dissipata nel segmento stesso: anche se il campo elettromagnetico considerato non e' quello di un'onda elettromagnetica, il significato del vettore di Poynting e' lo stesso

3. L'intensita' della luce solare che investe la Terra e' di 1.38 kW m^{-2}. Si supponga che la terra sia un disco piatto, ortogonale ai raggi solari e perfettamente assorbente

a. Calcolare la forza totale che agisce sulla Terra dovuta alla pressione di radiazione

La densita' di quantita' di moto trasportata dall'onda elettromagnetica e' in relazione alla densita' di energia:

$$u_P = \frac{u_E}{c}$$

Nell'intervallo *dt* la quantita' di moto persa dall'onda e trasferita alla superficie A della Terra e':

$$dp = u_P A c dt$$
$$\rightarrow \frac{dp}{dt} = u_P A c = u_E A = F$$

L'intensita' dell'onda e' legata alla densita' di energia da:

$$\frac{dE}{dt} = IA = u_E Ac \rightarrow I = u_E c$$

Quindi la forza totale (repulsiva) e':

$$F = u_E A = \frac{I}{c} A$$
$$\rightarrow F = \frac{1.38\ 10^3}{3\ 10^8}\left(6.4\ 10^6\right)^2 = 5.9\ 10^8\ \text{ N}$$

b. Confrontare con la forza gravitazionale (attrattiva):

Dalla legge di Newton:

$$F_g = G\frac{m_T m_S}{r^2} = 3.5\ 10^{22}\ \text{N}$$

L'effetto repulsivo della pressione di radiazione e' trascurabile in confronto a quello attrattivo della forza gravitazionale

4. Si consideri un laser di potenza *4.6 W*, il cui fascio, del diametro di *2.6 mm*, e' diretto verso l'alto. Si vuole mantenere in equilibrio nel campo gravitazionale terrestre un cilindretto perfettamente riflettente, di diametro inferiore a quello del fascio, per mezzo della pressione di radiazione.

   a. Quale deve essere l'altezza H del cilindro se esso ha densita' ρ?

   L'intensita' dell'onda emessa dal laser e':

$$I = \frac{W}{A}$$

in cui W e' la potenza del laser e A e' l'area di base del cilindro. La pressione di radiazione, nel caso di una superficie perfettamente riflettente, e' in relazione con l'intensita' nel seguente modo:

$$P = 2\frac{I}{c} = 2\frac{W}{Ac}$$

La forza totale esercitata dalla radiazione sulla base del cilindro e' quindi:

$$F = PA = 2\frac{W}{c}$$

Perche' il cilindro stia in equilibrio, occorre che la forza appena calcolata sia uguale alla forza di gravita:

$$\rho A H g = 2\frac{W}{c}$$
$$\rightarrow H = \frac{2W}{\rho A c g} = 0.5\ \mu m$$

5. Calcolare la pressione di radiazione su una superficie sferica completamente assorbente, posta ad una distanza di *1.5 m* da una lampadina da *500 W*, considerata come una sorgente puntiforme ed isotropa

   La relazione fra quantita' di moto trasferita ed energia emessa dalla lampadina e' quella solita:

$$dp = \frac{u_E}{c} dV$$
$$dV = 4\pi r^2 c dt$$
$$\rightarrow dp = \frac{u_E}{c} 4\pi r^2 c dt$$
$$\rightarrow P = \frac{F}{4\pi r^2} = \frac{dp}{dt}\frac{1}{4\pi r^2} = u_E$$

   La densita' di energia e' in relazione alla potenza della lampadina:

$$W dt = u_E 4\pi r^2 c dt$$
$$\rightarrow u_E = \frac{W}{4\pi r^2 c}$$

   Quindi:

$$P = \frac{W}{4\pi r^2 c} = 5.9\ 10^{-8}\ Nm^{-2}$$