Interferenza e diffrazione con gli esponenziali complessi

Nota

Non si fanno commenti sul significato dei risultati ottenuti, ne' su quello delle ipotesi di volta in volta assunte: lo scopo e' solo quello di mostrare come funzioni in pratica il formalismo dei numeri complessi

1. *Grandezze oscillanti ed esponenziali complessi*

Una perturbazione armonica, come un'onda e.m. piana monocromatica, si scrive come e' noto nel seguente modo:

$$E = E_0 \cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)$$

Il modulo del c.elettrico, funzione di x e t in questo esempio, dipende parametricamente da quattro quantita' reali:

E_0	ampiezza massima di oscillazione
$k = 2\pi/\lambda$	numero d'onda (frequenza spaziale)
$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$	pulsazione (frequenza temporale
ϕ	fase

Mentre questa rappresentazione e' del tutto intuitiva e facile da ricordare, non e' particolarmente pratica da usare nel caso in cui si debba considerare la somma di diverse pertrurbazioni armoniche, come avviene nei fenomeni di interferenza e diffrazione.
Si ricordi ora la relazione di Eulero per i numeri complessi di modulo = 1:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Essa deriva, come si ricordera', dall'estensione ad argomenti complessi della definizione dell'esponenziale in termini del suo sviluppo in serie di Taylor; infatti:

$$\begin{aligned}
& e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R} \\
& \rightarrow e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad \mathrm{z} \in \mathbb{C} \\
& z = i\alpha \rightarrow e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \\
& = 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \ldots
\end{aligned}$$

Ora, poiche'

$$i^2 = -1, i^3 = ii^2 = -i, i^4 = ii^3 = +1, i^5 = i, ...$$

si ha:

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - i\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + i\frac{\alpha^5}{5!} + ... \\
&= \underbrace{1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - ...}_{=\cos\alpha} + i\alpha - i\frac{\alpha^3}{3!} + i\frac{\alpha^5}{5!} \\
&= \cos\alpha + i\underbrace{\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + ...\right)}_{=\sin\alpha} \\
&= \cos\alpha + i\sin\alpha
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\cos\alpha = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\right)$$

La perturbazione armonica citata sopra e' soluzione dell'equazione delle onde, che e' un'equazione differenziale alle derivate parziali *lineare*: quindi, combinazioni lineari di soluzioni sono ancora soluzioni. Se prendiamo le soluzioni indipendenti

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \\
E_2 &= E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

e' possibile formalmente considerare la combinazione lineare

$$\begin{aligned}
&\tilde{E} = E_1 + iE_2 = E_0\left[\cos(kx - \omega t + \varphi) + i\sin(kx - \omega t + \varphi)\right] \\
&\rightarrow \tilde{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)}
\end{aligned}$$

che e' ancora una soluzione dell'eq. delle onde.

Supponiamo di voler eseguire manipolazioni algebriche *lineari* (somma algebrica, moltiplicazione per una costante) su un insieme di perturbazioni armoniche: esse si possono eseguire sulle corrispondenti funzioni esponenziali complesse, prendendo poi la parte reale del risultato come grandezze fisica. Tale manipolazione risulta piu' agevole del corrispondente algebra delle funzioni trigonometriche. Si noti inoltre che, per grandezze complesse oscillanti come quelle introdotte, la media temporale dell'intensita' e':

$$I \propto E^2 = E_0^2 \cos^2\left(kx - \omega t + \varphi\right) \rightarrow \langle I \rangle \propto \frac{E_0^2}{2}$$

Si ha allora la relazione generale, molto utile:

$$\begin{aligned}
& E_0^2 \cos^2\left(\underbrace{kx - \omega t + \varphi}_{\beta}\right) = \left[\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)\right]^2 \\
& \tilde{E} = \left|\tilde{E}\right| e^{i\beta} \rightarrow \mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right) = \left|\tilde{E}\right| \cos\beta \\
& \left[\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)\right]^2 = \left|\tilde{E}\right|^2 \cos^2\beta = \tilde{E}\tilde{E}^* \cos^2\beta \\
& \rightarrow \langle I \rangle \propto \tilde{E}\tilde{E}^* \left\langle \cos^2\beta \right\rangle = \frac{\tilde{E}\tilde{E}^*}{2}
\end{aligned}$$

2. *Somma di due onde sfasate*

$$\begin{aligned}
& E_1 = E_0 \cos\left(kx - \omega t\right) \rightarrow \tilde{E}_1 = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \\
& E_2 = E_0 \cos\left(kx - \omega t + \varphi\right) \rightarrow \tilde{E}_2 = E_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)} \\
& \tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = E_0 e^{i(kx - \omega t)} + E_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)} \\
& = E_0 \left[e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(kx - \omega t + \varphi)}\right] = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \left[1 + e^{i\varphi}\right] \\
& E = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right) = \mathrm{Re}\left\{E_0 \left[\cos\left(kx - \omega t\right) + i \sin\left(kx - \omega t\right)\right]\left[1 + \cos\varphi + i \sin\varphi\right]\right\} \\
& \rightarrow E = E_0 \left[\cos\left(kx - \omega t\right)\left(1 + \cos\varphi\right) - \sin\left(kx - \omega t\right)\sin\varphi\right]
\end{aligned}$$

Prendendo il quadrato si ha l'intensita' (si noti: questo si puo' fare ***dopo*** aver preso la parte reale, ***e non prima***!):

$$E = E_0\left[\cos(kx-\omega t)(1+\cos\varphi)-\sin(kx-\omega t)\sin\varphi\right]$$

$$\rightarrow E^2 = E_0^2\begin{bmatrix}\cos^2(kx-\omega t)\underbrace{(1+\cos\varphi)^2}_{=1+\cos^2\varphi+2\cos\varphi}\\ -2\cos(kx-\omega t)(1+\cos\varphi)\sin(kx-\omega t)\sin\varphi\\ +\sin^2(kx-\omega t)\sin^2\varphi\end{bmatrix}$$

$$= E_0^2\begin{bmatrix}\cos^2(kx-\omega t)+\cos^2(kx-\omega t)\cos^2\varphi+\cos^2(kx-\omega t)2\cos\varphi\\ +\sin^2(kx-\omega t)\sin^2\varphi+\text{termini che vanno a zero nella media}\end{bmatrix}$$

Facendo la media su molti periodi:

$$\left\langle E^2\right\rangle = E_0^2\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos^2\varphi}{2}+\frac{2\cos\varphi}{2}+\frac{\sin^2\varphi}{2}\right] = E_0^2\left[1+\cos\varphi\right]$$

Usando l’espressione vista prima per il valor medio in termini del campo complesso:

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\left[1+e^{i\varphi}\right] \rightarrow \tilde{E}^* = E_0 e^{-i(kx-\omega t)}\left[1+e^{-i\varphi}\right]$$

$$\rightarrow \left\langle E^2\right\rangle = \frac{\left\langle \tilde{E}\tilde{E}^*\right\rangle}{2} = \frac{E_0^2}{2}e^{i(kx-\omega t)}e^{-i(kx-\omega t)}\left[1+e^{i\varphi}\right]\left[1+e^{-i\varphi}\right]$$

$$= \frac{E_0^2}{2}\left[2+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right] = E_0^2(1+\cos\varphi)$$

come si vede, il risultato si ottiene piu’ velocemente.

3. Interferenza di due fenditure

La somma a grande distanza delle due perturbazioni provenienti da fenditure di larghezza trascurabile si puo’ scrivere in modo simile a quanto visto sopra:

$$\tilde{E}_1 = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\tilde{E}_2 = E_0 e^{i(kx-\omega t+\varphi)}$$

In questo caso abbiamo per lo sfasamento, considerando la somma delle perturbazioni in un punto come quella di due onde piane:

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} \\
&\rightarrow \tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = E_0 e^{i(kx-\omega t)} + E_0 e^{i(kx-\omega t+\varphi)} \\
&= E_0\left[e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(kx-\omega t+\varphi)}\right] = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\left[1 + e^{i\frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}}\right]
\end{aligned}
$$

Il campo elettrico totale e' la parte reale della somma, come nel caso precedente. Facendo la media su molti periodi, si ottiene, in modo simile a quello visto per le due onde sfasate:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle E^2 \right\rangle = E_0^2\left[\frac{1}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{2} + \frac{2\cos\varphi}{2} + \frac{\sin^2\varphi}{2}\right] = E_0^2\left[1+\cos\varphi\right] \\
&\rightarrow \left\langle E^2 \right\rangle = E_0^2\left[1 + \cos\frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}\right] \\
&\rightarrow \left\langle I \right\rangle = 2I_0\left[1 + \cos\frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}\right]
\end{aligned}
$$

4. Interferenza di N fenditure

Se si trascurano gli effetti della diffrazione, questo e' il modello del reticolo di diffrazione (che si potrebbe chiamare, meglio, reticolo di interferenza). Si considerino N fenditure sottili, equispaziate della distanza d, investite dalla solita onda piana monocromatica; allora la differenza di fase fra due fenditure contigue e'

$$
\delta = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta
$$

per l'onda uscente, osservata ad angolo θ rispetto alla direzione di incidenza. Il campo elettrico totale e' allora:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E} = E_0 e^{i(kr-\omega t)} + E_0 e^{i(kr-\omega t+\delta)} + E_0 e^{i(kr-\omega t+2\delta)} + E_0 e^{i(kr-\omega t+3\delta)} + \dots \\
&= \sum_{j=1}^{N} E_0 e^{i(kr-\omega t+(j-1)\delta)} = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \sum_{j=1}^{N} e^{i((j-1)\delta)}
\end{aligned}
$$

Per calcolare la somma, si osservi che essa e' in effetti quella di una progressione geometrica, la cui base e' un numero complesso:

$$\sum_{j=1}^{N} e^{i((j-1)\delta)} = \sum_{j=1}^{N} \left[e^{i\delta}\right]^{j-1} = \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}$$
$$\to \tilde{E} = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}$$

Si puo' fare il seguente trucchetto:

$$\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} = \frac{e^{iN\delta/2}}{e^{i\delta/2}} \frac{e^{-iN\delta/2}-e^{iN\delta/2}}{e^{-i\delta/2}-e^{i\delta/2}} = \frac{e^{iN\delta/2}}{e^{i\delta/2}} \frac{-2i\sin N\delta/2}{-2i\sin\delta/2} = e^{i(N-1)\delta/2} \frac{\sin N\delta/2}{\sin\delta/2}$$

che porta all'espressione:

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} = E_0 e^{i(kr-\omega t+(N-1)\delta)} \frac{\sin N\delta/2}{\sin\delta/2}$$
$$\to I \propto \left[\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)\right]^2 = E_0^2 \cos^2\left(kr-\omega t+(N-1)\delta\right) \frac{\sin^2 N\delta/2}{\sin^2\delta/2}$$
$$\to \langle I \rangle \propto \frac{1}{2} E_0^2 \frac{\sin^2 N\delta/2}{\sin^2\delta/2} = \frac{1}{2} E_0^2 \frac{\sin^2\left(N\frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta\right)}$$

5. Diffrazione di Fraunhofer di una fenditura

Si considera una fenditura di larghezza b a grande distanza da una sorgente puntiforme e dallo schermo di osservazione (limite onde piane): suddividendola idealmente in tante strisce parallele di larghezza infinitesima, lo sfasamento e' proporzionale a x, coordinata della striscia lungo la larghezza della fenditura:

$$\delta = kx\sin\theta$$

Allora il campo elettrico totale su un punto dello schermo di osservazione si puo' scrivere, avendo misurato con r la distanza del punto di osservazione dal centro della fenditura *($x=0$):*

$$d\tilde{E} = E_0 dx e^{i(kr-\omega t+\delta)}$$

$$\rightarrow \tilde{E} = E_0 \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i(kr-\omega t+kx\sin\theta)} dx = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i(kx\sin\theta)} dx$$

$$= E_0 e^{i(kr-\omega t)} \frac{1}{ik\sin\theta} e^{i(kx\sin\theta)}\Big|_{-b/2}^{+b/2} = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \frac{e^{i(kb/2\sin\theta)} - e^{-i(kb/2\sin\theta)}}{ik\sin\theta}$$

$$= E_0 e^{i(kr-\omega t)} \frac{b}{b} \frac{2i\sin(k\,b/2\sin\theta)}{ik\sin\theta} = \underbrace{E_0 b}_{\text{campo totale}} e^{i(kr-\omega t)} \frac{\sin(k\,b/2\sin\theta)}{kb/2\sin\theta}$$

Quindi l'intensita' in funzione dell'angolo di osservazione e' :

$$E = \mathrm{Re}(\tilde{E}) = \mathrm{Re}\left(E_{0tot} e^{i(kr-\omega t)} \frac{\sin(k\,b/2\sin\theta)}{kb/2\sin\theta}\right)$$

$$= E_{0tot} \frac{\sin(k\,b/2\sin\theta)}{kb/2\sin\theta} \cos(kr-\omega t)$$

$$I \propto E^2 = E_{0tot}^2 \cos^2(kr-\omega t) \frac{\sin^2(k\,b/2\sin\theta)}{(kb/2\sin\theta)^2}$$