Fisica Generale II con Laboratorio

Lezione 0

Gravitazione e leggi di Kepler

Leggi di Kepler:

Fenomenologiche, dedotte dalle osservazioni e misure accurate di Brahe e Kepler stesso raccolte in molti anni

i) *Le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il Sole occupa uno dei fuochi*

ii) *Il raggio vettore che misura la posizione di un pianeta rispetto al Sole spazza aree uguali in tempi uguali*

iii) *Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita*

Ben verificate dai dati osservativi

Problema dei due corpi

Moto di un pianeta intorno al Sole: determinato dalla legge fondamentale della dinamica, e dalla legge di gravitazione universale

Realta':
Problema a molti corpi (influenza anche degli altri pianeti, satelliti, …)

$\rightarrow$Separazione del *moto del centro di massa* del Sistema Solare (con ottima approssimazione: moto uniforme, visto che il S.S. e' pressoche' isolato) e del *moto relativo* di ogni parte rispetto al centro di massa

$\rightarrow$ Effetto del Sole *dominante* su quello degli altri pianeti

Approssimazioni:

Il centro di massa coincide con il Sole
L'effetto degli altri pianeti viene trascurato

Orbite ellittiche - I

Traccia del procedimento:

Eq. fondamentale della dinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{u}} \end{cases} \rightarrow m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Due leggi di conservazione all'opera (sistema isolato):

Momento angolare:

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} =$ costante, $\mathbf{r}$ posizione, $\mathbf{p}$ quantita' di moto del pianeta

Energia totale:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{costante} = E$$

Orbite ellittiche - II

$\mathbf{L} = $ costante $\rightarrow$ Moto in un piano

Infatti:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{L} \perp \mathbf{r}, \mathbf{p}$$

$\rightarrow$ Il piano individuato da $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ ad ogni istante ha sempre la stessa normale

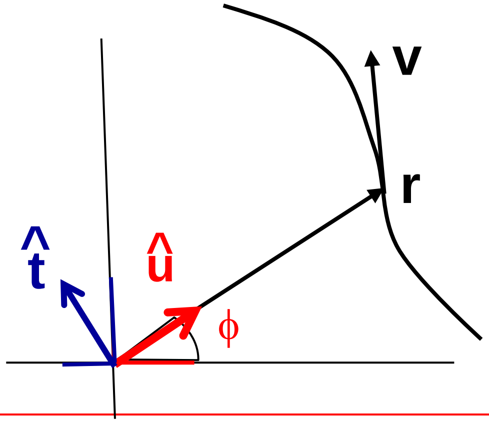
$\rightarrow$ L'orbita e' piana

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \Big(\underbrace{\cancel{\mathbf{v}_r}}_{\mathbf{v_r} \parallel \mathbf{r}} + \mathbf{v}_\varphi \Big) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi$$

$$\rightarrow |\mathbf{L}| = mrv_\varphi = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{costante} = L$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{\mathbf{u}} \right) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}} + r\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}} + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$



$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d(\cos\varphi)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d(\sin\varphi)}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d(\sin\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \underbrace{\left(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right)}_{\hat{\mathbf{t}}}\frac{d\varphi}{dt} = \hat{\mathbf{t}}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{t}} \perp \hat{\mathbf{u}}$$

Orbite ellittiche - III

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \perp \hat{\mathbf{t}} \rightarrow v^2 = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$mr^2\frac{d\varphi}{dt} = L = \text{costante} \rightarrow r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr}$$

$$\rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{mr^2}\right]$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = E$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{mr^2}\right] - G\frac{mM}{r} = E$$

Orbite ellittiche - IV

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \sqrt{\dfrac{2E}{m} + \dfrac{GM}{r} - \dfrac{L^2}{m^2 r^2}} \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{L}{mr^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dfrac{d\varphi}{dt}}{\dfrac{dr}{dt}} = \frac{\dfrac{L}{mr^2}}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} + \dfrac{GM}{r} - \dfrac{L^2}{m^2 r^2}}} = \frac{L}{r\sqrt{2Emr^2 + GMm^2 r - L^2}}$$

$$d\varphi = \frac{L}{mr\sqrt{\dfrac{2E}{m} r^2 + GMr - \left(\dfrac{L}{m}\right)^2}} dr$$

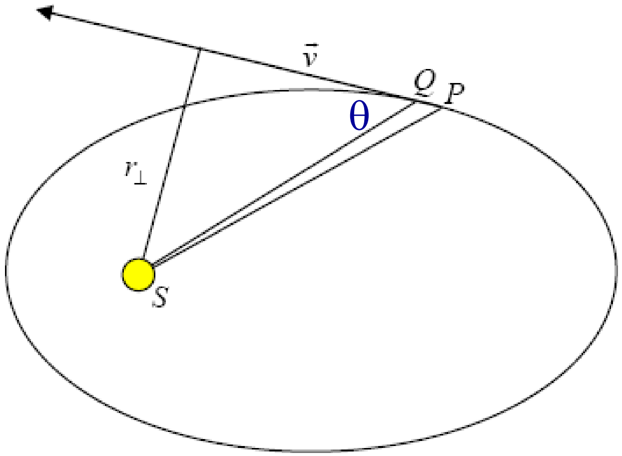
Soluzione dell'eq. differenziale: Integrale

$\varphi = \varphi \;\; r$ equazione dell'orbita $\rightarrow \begin{cases} \text{Ellisse quando } E < 0 \\ \text{Iperbole quando } E > 0 \end{cases}$

Origine (posizione del Sole): fuoco dell' ellisse

Legge delle aree

Nell'intervallo dt: spostamento da P a Q



Area spazzata dal raggio vettore: triangolo SPQ

$$dA = \frac{1}{2} base \cdot altezza = \frac{1}{2} v dt \cdot r_\perp$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v \cdot r_\perp$$

$$L = \left|\mathbf{r} \times \mathbf{p}\right| = m\left|\left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right)\right| = mrv \sin\theta = mvr_\perp = \text{costante}$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v \cdot r_\perp = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

Terza legge

Restringendo per semplicita' l'analisi al caso di orbite circolari (quasi sempre buona approssimazione..):

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{2GM}$$

Notare: la costante di proporzionalita' dipende solo dalla massa del Sole

Parametri dei pianeti

	Mean Distance from Sun	Sidereal Orbital Period	Mass	Sidereal Rotation Period	Density	Surface Gravity	Escape Velocity
	AU	P_e	M_e	days	ρ_e	g_e	V_e
Mercury	**0.387**	**0.241**	**0.055**	**58.807**	**0.984**	**0.38**	**0.380**
Venus	**0.723**	**0.615**	**0.815**	**243.687**	**0.951**	**0.90**	**0.926**
Earth	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.00**	**1.000**
Mars	**1.524**	**1.881**	**0.107**	**1.029**	**0.713**	**0.38**	**0.449**
Jupiter	**5.203**	**11.857**	**317.828**	**0.415**	**0.241**	**2.64**	**5.382**
Saturn	**9.537**	**29.424**	**95.161**	**0.445**	**0.125**	**1.14**	**3.227**
Uranus	**19.191**	**83.749**	**14.536**	**0.720**	**0.230**	**0.92**	**1.911**
Neptune	**30.069**	**163.727**	**17.148**	**0.673**	**0.297**	**1.15**	**2.106**

Parametri dei pianeti (con Plutone)

Planet	Radius (km)	Orbital Semimajor Axis(10^6km)	Mass (kg)	Orbital Period	Orbital Eccentricity	Inclination to Earth's Orbit
Mercury	2440	57.9	3.30×10^{23}	88 days	0.206	7.00
Venus	6050	108	4.87×10^{24}	225 days	0.00677	3.39
Earth	6380	150	5.97×10^{24}	1 yr	0.0167	0
Mars	3400	228	6.42×10^{23}	1.88 yr	0.0934	1.85
Jupiter	71,500	778	1.90×10^{27}	11.9	0.0484	1.31
Saturn	60,300	1430	5.69×10^{26}	29.4	0.0542	2.48
Uranus	25,600	2870	8.69×10^{25}	83.8	0.0472	0.770
Neptune	24,800	4500	1.02×10^{26}	164	0.00859	0.770
Pluto	1150	5920	1.31×10^{22}	248	0.249	17.1

Satelliti di Giove (alcuni)

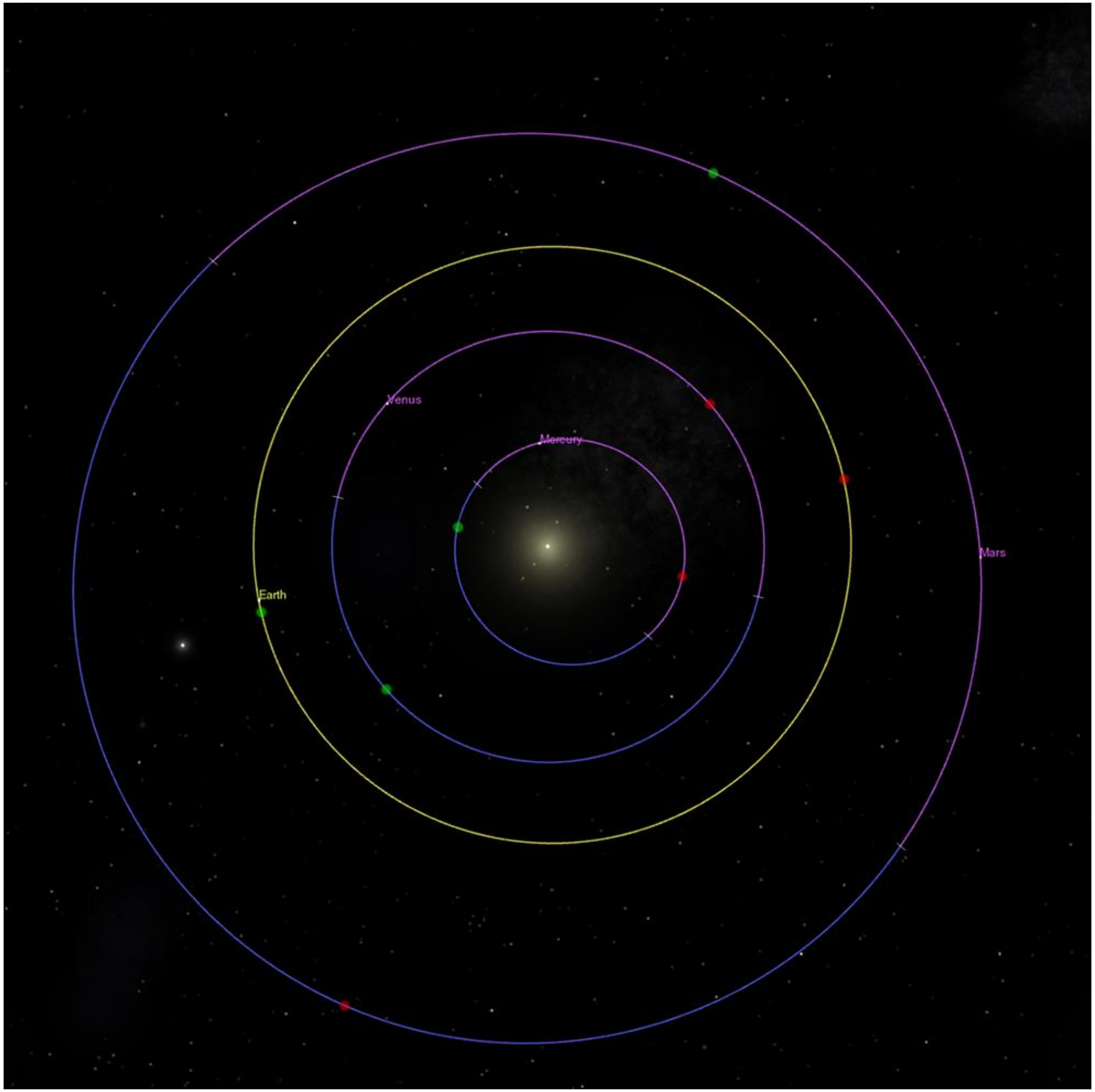
Quelli scoperti da Galileo: *Pianeti Medicei*

Satellite	Orbital Radius in 10^6 km	Orbital Period in Days
Io	0.422	1.77
Europa	0.671	3.55
Ganymede	1.070	7.16
Callisto	1.880	16.7

Insieme a Giove, costituiscono un piccolo sistema solare..

Soddisfano la III legge?

Pianeti interni



Pianeti esterni