Fisica Generale II
con Laboratorio

Lezione 0

Gravitazione e leggi di Kepler

Leggi di Kepler:

Fenomenologiche, dedotte dalle osservazioni e misure accurate di Brahe e Kepler stesso raccolte in molti anni

i)Le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il Sole occupa uno dei fuochi

ii)Il raggio vettore che misura la posizione di un pianeta rispetto al Sole spazza aree uguali in tempi uguali

iii)Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita

Ben verificate dai dati osservativi

Problema dei due corpi

Moto di un pianeta intorno al Sole: determinato dalla legge fondamentale della dinamica, e dalla legge di gravitazione universale

Realta':
Problema a molti corpi (influenza anche degli altri pianeti, satelliti, …)

$\rightarrow$Separazione del *moto del centro di massa* del Sistema Solare (con ottima approssimazione: moto uniforme, visto che il S.S. e' pressoche' isolato) e del *moto relativo* di ogni parte rispetto al centro di massa

$\rightarrow$ Effetto del Sole *dominante* su quello degli altri pianeti

Approssimazioni:
Il centro di massa coincide con il Sole
L'effetto degli altri pianeti viene trascurato

Orbite ellittiche - I

Eq. fondamentale della dinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{u}} \end{cases} \rightarrow m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$ Equazioni del moto

Due leggi di conservazione all'opera (sistema isolato):

Momento angolare:

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} =$ costante, $\mathbf{r}$ posizione, $\mathbf{p}$ quantita' di moto del pianeta

Energia totale:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{costante} = E$$

Orbite ellittiche - II

$\mathbf{L} =$ costante $\rightarrow$ Moto in un piano

Infatti:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{L} \perp \mathbf{r}, \mathbf{p}$$

$\rightarrow$ Piano individuato da $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ ad ogni istante: sempre la stessa normale

$\rightarrow$ Orbita piana

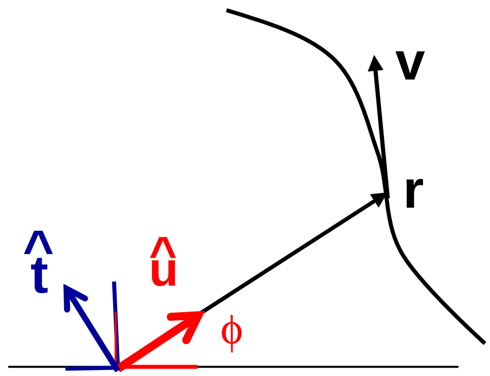
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \left(\underbrace{\cancel{\mathbf{v}_r}}_{\mathbf{v_r} \| \mathbf{r}} + \mathbf{v}_\varphi \right) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi$$

$$\rightarrow |\mathbf{L}| = mrv_\varphi = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{costante} = L$$

Moto analizzato in coordinate polari meglio che in coordinate cartesiane

Orbite ellittiche - III

$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}, \quad \hat{\mathbf{u}}$ versore radiale



Componenti polari della velocita':

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{u}}) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}} + r\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}} + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d(\cos\varphi)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d(\sin\varphi)}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d(\sin\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \underbrace{\left(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right)}_{\hat{\mathbf{t}}}\frac{d\varphi}{dt} = \hat{\mathbf{t}}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{t}} \perp \hat{\mathbf{u}}$$

$$\rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$

Orbite ellittiche - IV

Componenti polari dell' accelerazione:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}}+\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\hat{\mathbf{t}}+r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\hat{\mathbf{t}}+r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}$$

$$\hat{\mathbf{t}}=-\sin\varphi\hat{\mathbf{i}}+\cos\varphi\hat{\mathbf{j}}\rightarrow\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}=\left(-\cos\varphi\hat{\mathbf{i}}-\sin\varphi\hat{\mathbf{j}}\right)\frac{d\varphi}{dt}=-\hat{\mathbf{r}}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow\mathbf{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{t}}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\hat{\mathbf{t}}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}$$

$$\rightarrow\mathbf{a}=\underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]}_{a_r}\hat{\mathbf{r}}+\underbrace{\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]}_{a_\varphi}\hat{\mathbf{t}}$$

Orbite ellittiche - V

$$\rightarrow \begin{cases} a_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 & \text{Accelerazione radiale} \\ a_\varphi = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} + r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = r\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right) & \text{Accelerazione tangenziale} \end{cases}$$

Forza gravitazionale: solo radiale
→Accelerazione tangenziale = 0
Equazioni del moto in coordinate polari:

$$\rightarrow \begin{cases} a_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -G\dfrac{mM}{r^2} \\ a_\varphi = r\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \rightarrow r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = \text{costante} = \dfrac{L}{m} \end{cases}$$

Orbite ellittiche - VI

Eq. radiale:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -G\frac{mM}{r^2}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4} \rightarrow r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^3}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -G\frac{mM}{r^2}$$

Cambiamento di variabile:

$$u = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -r^2\frac{du}{dt} = -r^2\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}$$

Orbite ellittiche - VII

Cerchiamo l'eq. differenziale dell' orbita:

$$\rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L}{m}\frac{d^2 u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{d^2 u}{d\varphi^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

$$\rightarrow -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -G\frac{mM}{r^2} \rightarrow -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{L^2}{m^2}u^3 = -GmMu^2$$

$$\rightarrow \frac{L^2}{m^2}\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{m^2}u = GmM$$

$$\rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm^3 M}{L^2}$$

Eq. diff. lineare, del II ordine, non omogenea per la funzione incognita $u(\varphi)$

Soluzione generale:

Int. generale omogenea + Int. particolare non-omogenea

Orbite ellittiche - VIII

Int. generale eq. omogenea associata: dipende da 2 costanti arbitrarie:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0$$ Equazione "del moto armonico"

$$\rightarrow u(\varphi)=A'\cos\varphi+B'\sin\varphi=A\cos(\varphi-\varphi_0)$$

NB Contesto diverso, matematicamente uguale:
Stessa equazione → Stessa soluzione

Int. particolare non omogenea:

$$u(\varphi)=\frac{Gm^3M}{L^2}$$

$$\left[\text{Infatti:}\frac{du}{d\varphi}=0,\frac{d^2u}{d\varphi^2}=0\right]$$

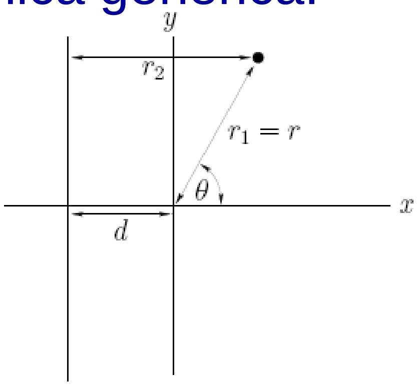
Orbite ellittiche - IX

Int. generale eq. non omogenea:

$$u(\varphi) = \frac{Gm^3M}{L^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\to r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{\frac{Gm^3M}{L^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0)}$$ Eq. di una conica in coord. polari

Conica generica:



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+d} = \frac{r}{r\cos\theta + d} = e,$$

$$r = \frac{r_c}{1 - e\cos\theta}, \quad r_c = e\,d$$

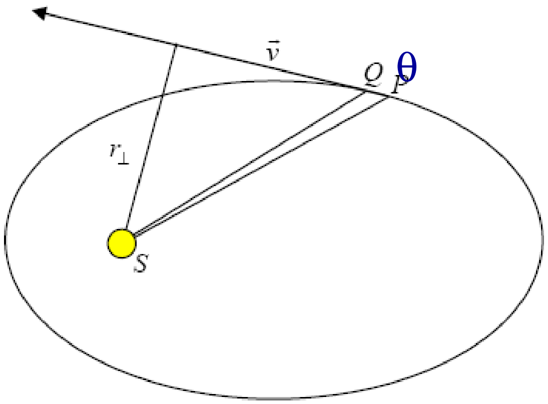
Ellisse: 0< e < 1

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_c}{1-e^2}, \\ b &= \frac{r_c}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{1-e^2}\,a, \\ x_c &= \frac{e\,r_c}{1-e^2} = e\,a. \end{aligned}$$

Legge delle aree

Nell'intervallo *dt*: spostamento da P a Q



Area spazzata nell'intervallo *dt*: triangolo SPQ

$$dA = \frac{1}{2} base \cdot altezza = \frac{1}{2} v dt \cdot r_\perp$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v \cdot r_\perp$$

$$L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m\left|(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\right| = mrv \sin\theta = mvr_\perp = \text{costante}$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v \cdot r_\perp = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

Terza legge

Restringendo per semplicita' l'analisi al caso di orbite circolari (quasi sempre buona approssimazione..):

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

Notare: la costante di proporzionalita' dipende solo dalla massa del Sole

Parametri dei pianeti

	Mean Distance from Sun	Sidereal Orbital Period	Mass	Sidereal Rotation Period	Density	Surface Gravity	Escape Velocity
	AU	P_e	M_e	days	ρ_e	g_e	V_e
Mercury	**0.387**	**0.241**	**0.055**	**58.807**	**0.984**	**0.38**	**0.380**
Venus	**0.723**	**0.615**	**0.815**	**243.687**	**0.951**	**0.90**	**0.926**
Earth	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.00**	**1.000**
Mars	**1.524**	**1.881**	**0.107**	**1.029**	**0.713**	**0.38**	**0.449**
Jupiter	**5.203**	**11.857**	**317.828**	**0.415**	**0.241**	**2.64**	**5.382**
Saturn	**9.537**	**29.424**	**95.161**	**0.445**	**0.125**	**1.14**	**3.227**
Uranus	**19.191**	**83.749**	**14.536**	**0.720**	**0.230**	**0.92**	**1.911**
Neptune	**30.069**	**163.727**	**17.148**	**0.673**	**0.297**	**1.15**	**2.106**

Parametri dei pianeti (con Plutone)

Planet	Radius (km)	Orbital Semimajor Axis(10^6km)	Mass (kg)	Orbital Period	Orbital Eccentricity	Inclination to Earth's Orbit
Mercury	2440	57.9	3.30×10^{23}	88 days	0.206	7.00
Venus	6050	108	4.87×10^{24}	225 days	0.00677	3.39
Earth	6380	150	5.97×10^{24}	1 yr	0.0167	0
Mars	3400	228	6.42×10^{23}	1.88 yr	0.0934	1.85
Jupiter	71,500	778	1.90×10^{27}	11.9	0.0484	1.31
Saturn	60,300	1430	5.69×10^{26}	29.4	0.0542	2.48
Uranus	25,600	2870	8.69×10^{25}	83.8	0.0472	0.770
Neptune	24,800	4500	1.02×10^{26}	164	0.00859	0.770
Pluto	1150	5920	1.31×10^{22}	248	0.249	17.1

Satelliti di Giove (alcuni)

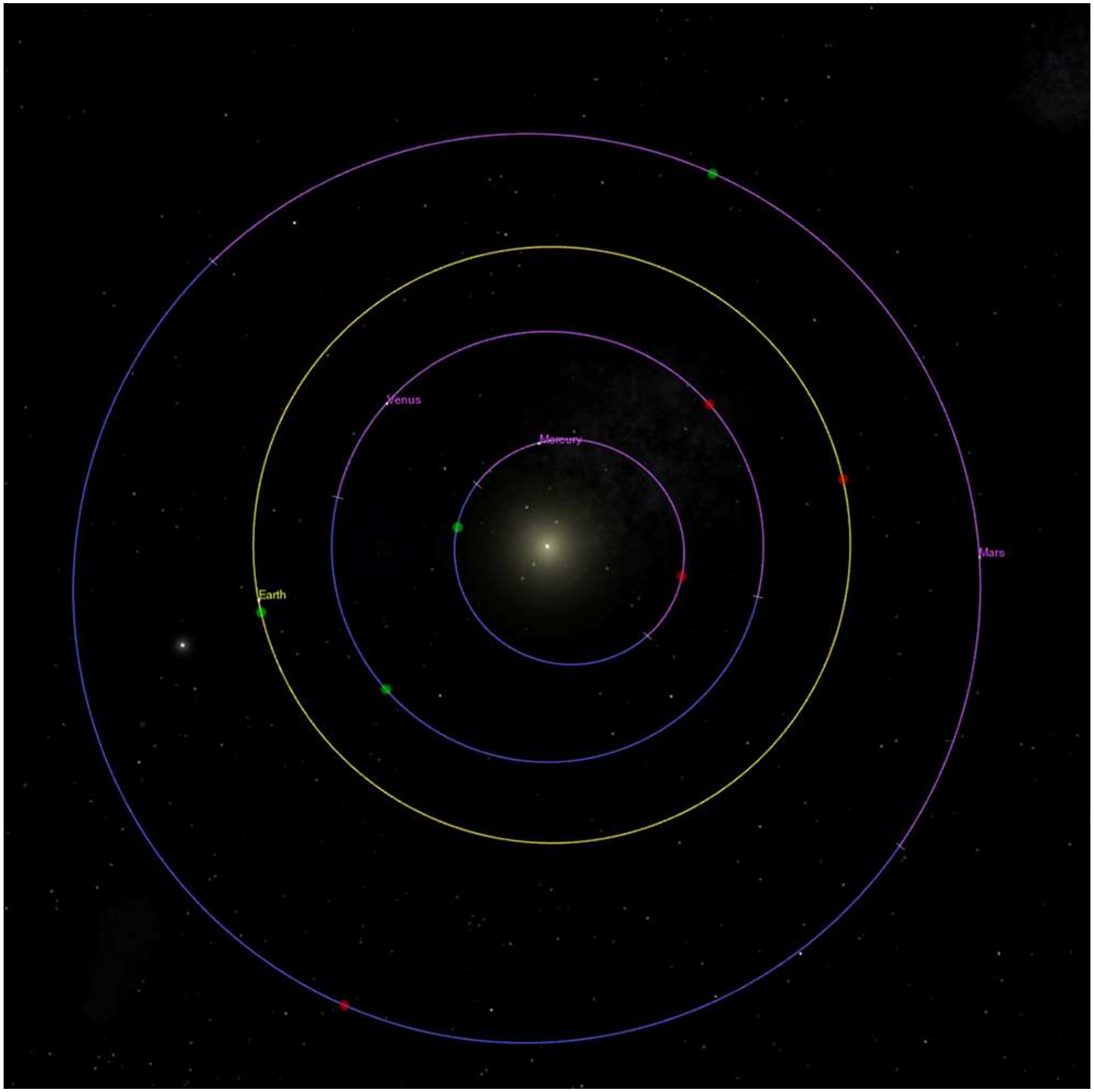
Quelli scoperti da Galileo: *Pianeti Medicei*

Satellite	Orbital Radius in 10^6 km	Orbital Period in Days
Io	0.422	1.77
Europa	0.671	3.55
Ganymede	1.070	7.16
Callisto	1.880	16.7

Insieme a Giove, costituiscono un piccolo sistema solare..

Soddisfano la III legge?

Pianeti interni



Pianeti esterni