

Relazione fra campo generato da una carica in moto e la legge elementare di Laplace

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{Campo di una carica puntiforme}$$

Se considero N cariche, tutte con la stessa velocità:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Nq \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Campo generato da dN cariche, tutte con la stessa velocità:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dNq \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} ndVq \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overbrace{qn\mathbf{v}}^{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{r}} dV}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

Per un filo percorso da corrente,

campo generato da tutte le cariche in moto nel filo:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{\text{tutto il filo}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

$$dV = d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{j} dV = \mathbf{j} (d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})$$

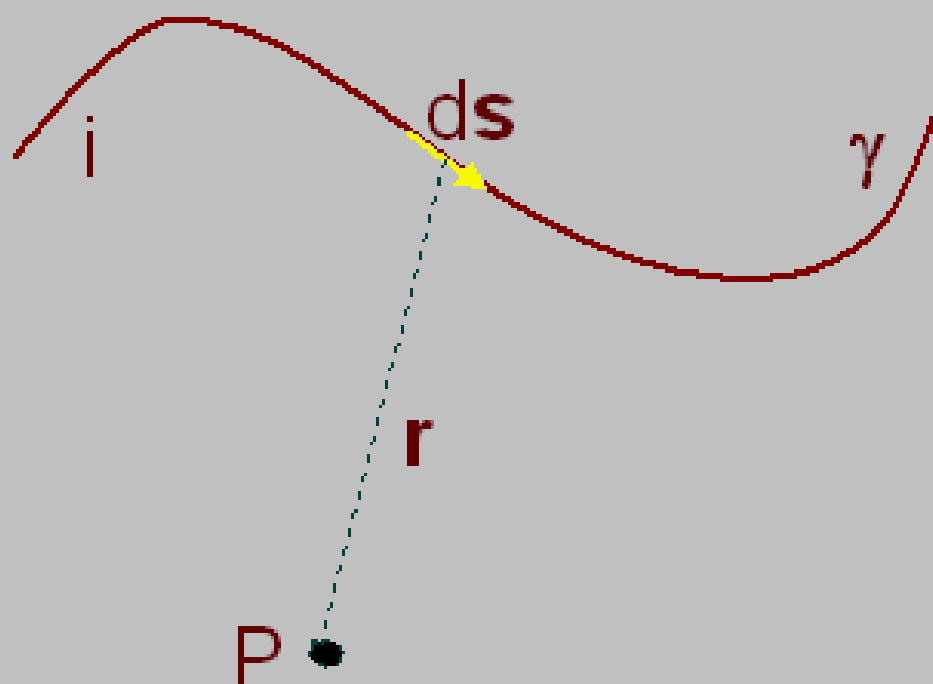
$$\int_{\text{Sez. del filo}} \mathbf{j} (d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) = \int_{\mathcal{A}} j dA ds = i ds$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\text{tutto il filo}} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{campo di un elemento di filo}$$

La legge di Laplace

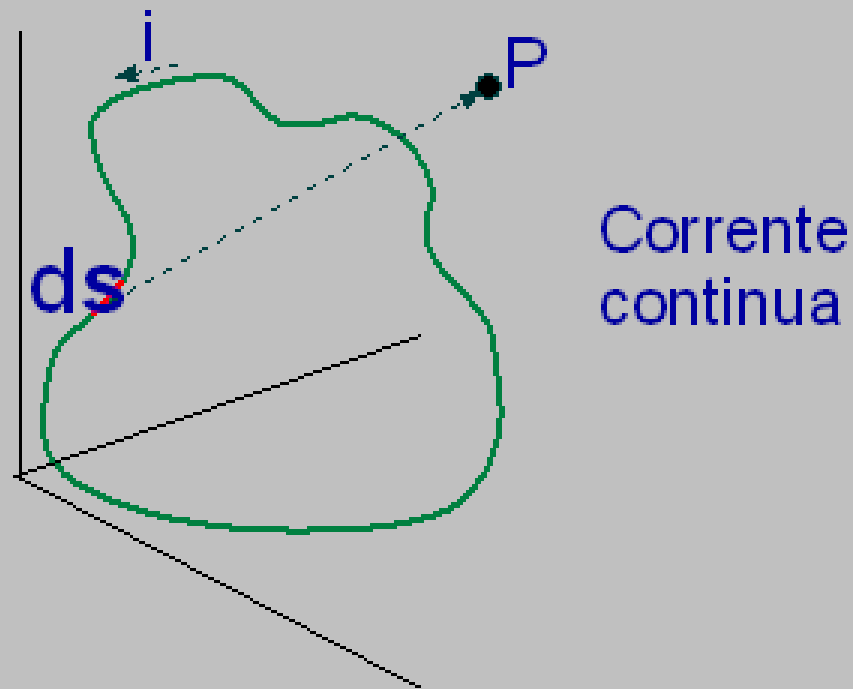
Campo di un filo percorso da corrente



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

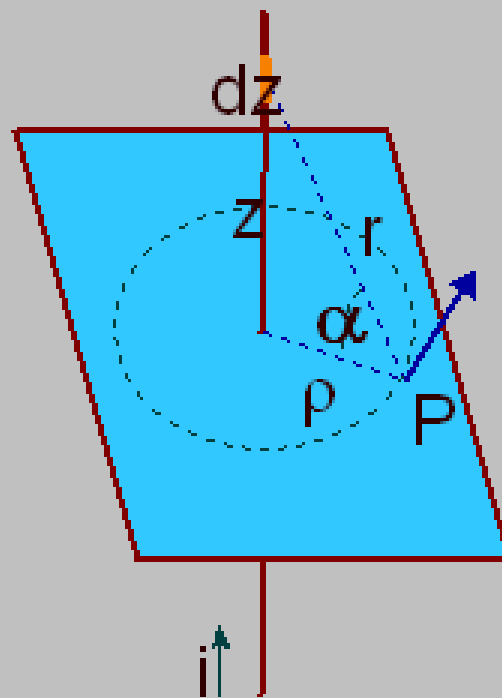
Campo di un circuito chiuso



In ogni punto dello spazio, somma di tutti gli elementi di corrente:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\text{circuito}} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Applicazione: filo indefinito



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{i d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

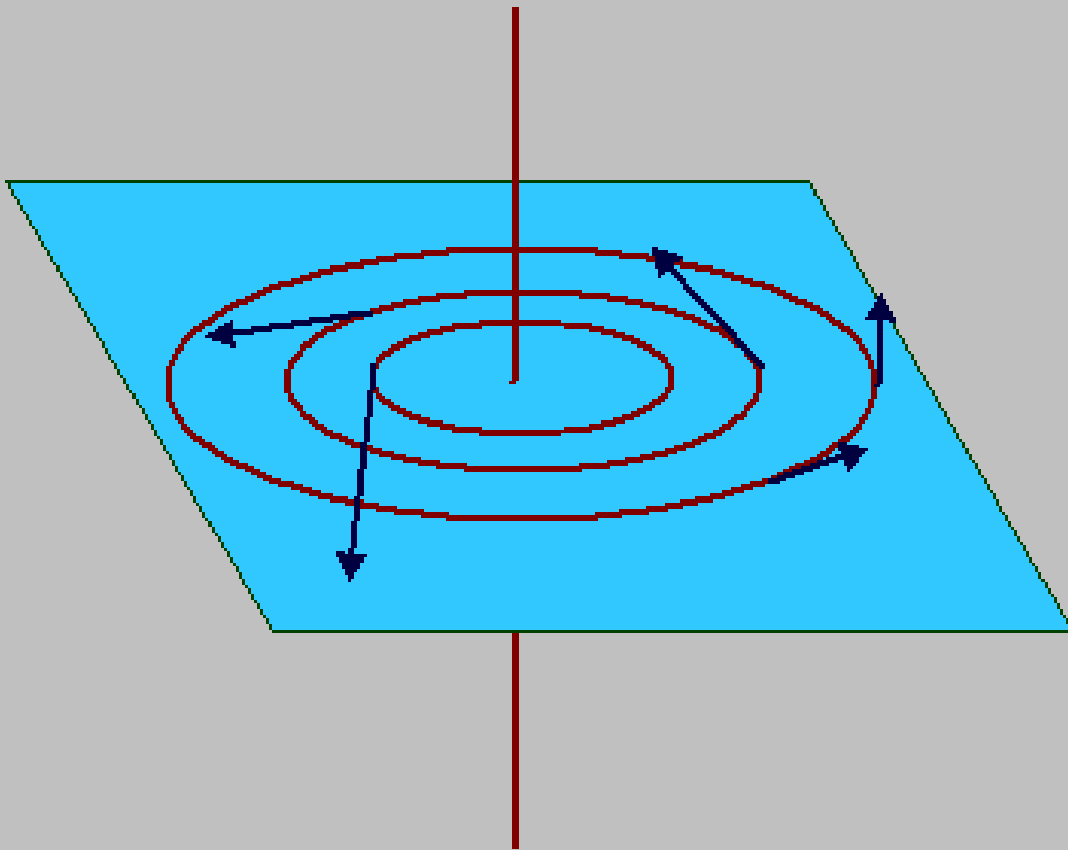
$$|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}| = dz \sin \vartheta = dz \cos \alpha$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2, z = \rho \tan \alpha$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \rho^2 (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{\rho^2}{\cos^2 \alpha} \\ dz = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dz}{r^2} = \frac{d\alpha}{\rho}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{\rho} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{\rho} \cdot 2$$

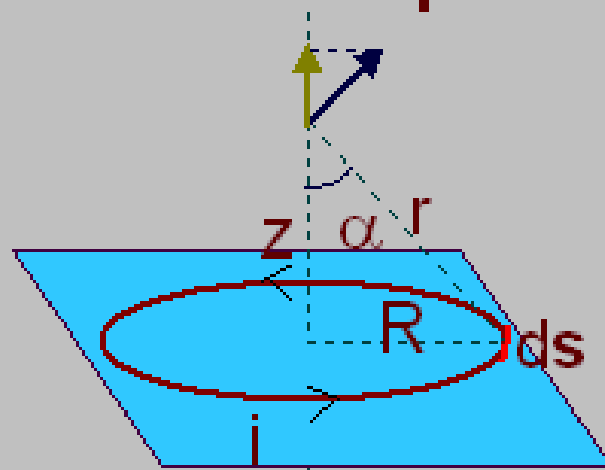
Linee di campo di un filo



Cerchi concentrici all'asse del filo: campo sempre tangente al cerchio

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

Applicazione: campo sull'asse di una spira circolare



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Componente perp. all'asse di ogni contributo: compensata da contributo diametralmente opposto

$$dB_{\parallel} = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R d\theta}{r^2} \sin \alpha$$

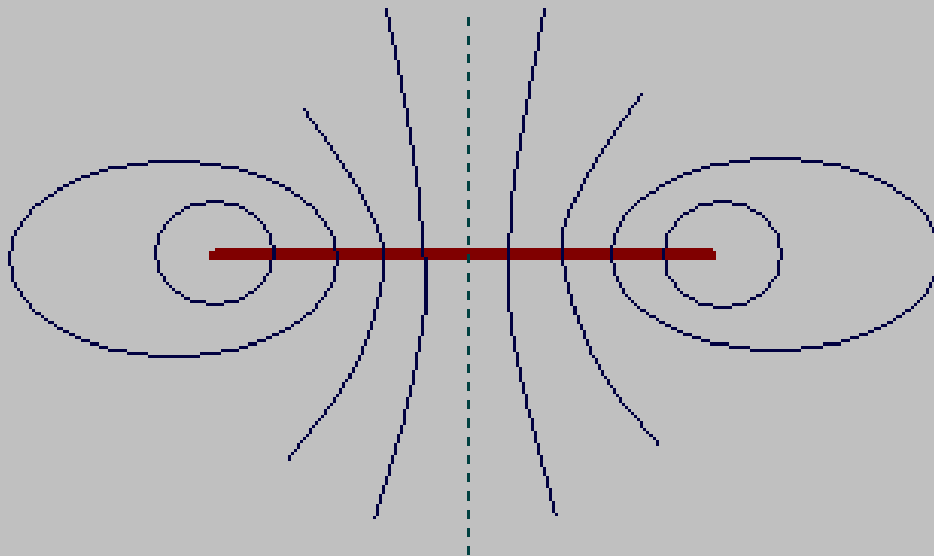
$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\rightarrow dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \rightarrow B_{\parallel} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Linee di campo per la spira circolare

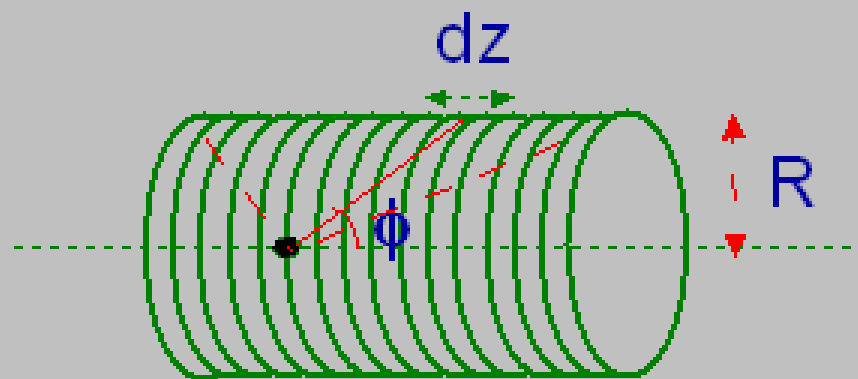


Tutte le linee sono chiuse

L'andamento generale e' lo stesso delle linee di campo di un dipolo elettrico (a grande r)

Spira circolare: prototipo di *dipolo magnetico*

Applicazione: campo sull'asse di un solenoide - 1



Bobina: successione di spire identiche, l'una in serie all'altra

Densita' di spire: n per metro

per una spira:

$$B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

per il contributo delle spire contenute in dz :

$$dB = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} n dz$$

campo totale al centro:

$$B = \int_{-L}^{+L} \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} n dz = \frac{\mu_0}{2} i n R^2 \int_{-L}^{+L} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Applicazione: campo sull'asse di un solenoide - 2

Sommando tutti i contributi:

$$B = \frac{\mu_0}{2} in R^2 \int_{-L}^{+L} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$z \tan \varphi = R \rightarrow dz = R \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} in R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{1}{R^3 (1 + \cot^2 \varphi)^{3/2}}$$

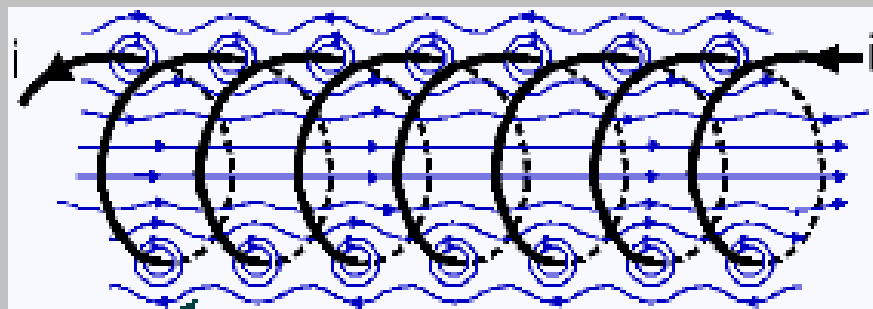
$$= \frac{\mu_0}{2} in \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{2} in (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

Se ϕ_1, ϕ_2 tendono a $\pi, 0$, si ha:

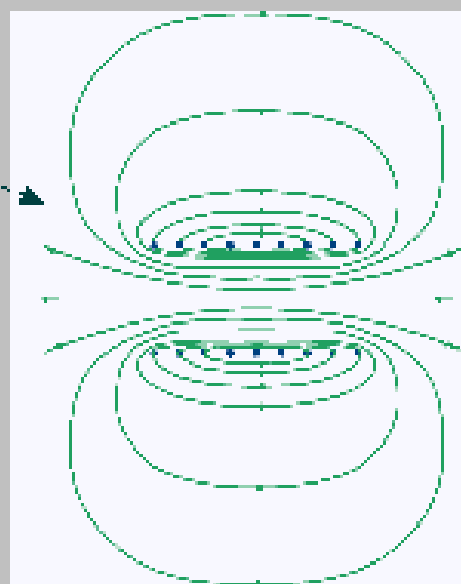
$$B = \mu_0 ni$$

campo uniforme lungo l'asse

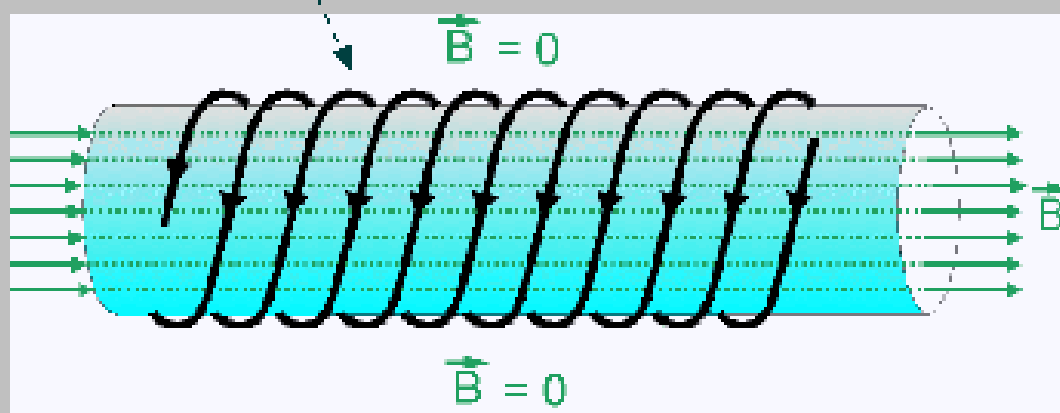
Campo di un solenoide



Solenoide finito

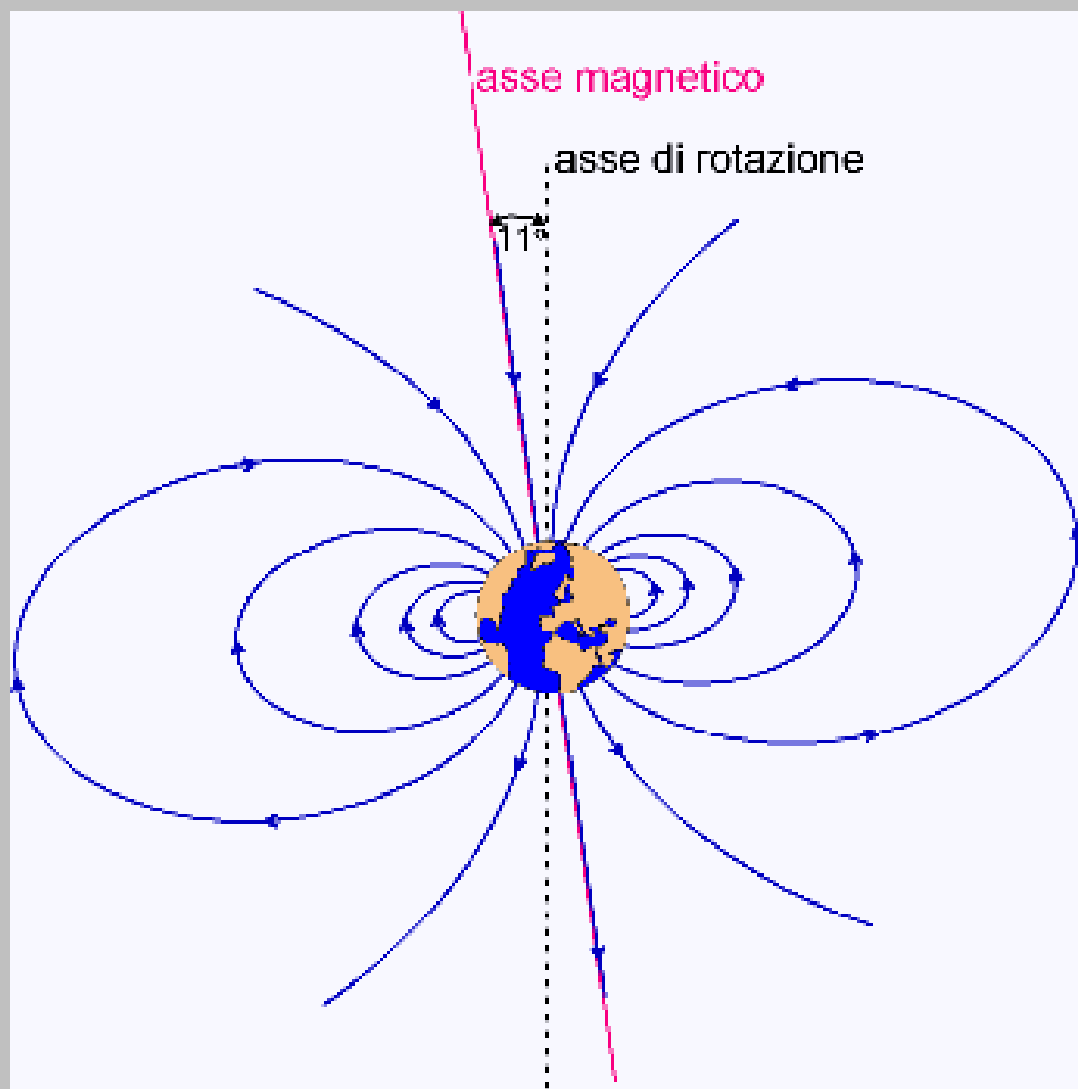


Solenoide infinito



(da V.Gracco - Fisica generale II)

Campo magnetico terrestre



Asse magnetico disallineato rispetto
ad asse di rotazione

Campo geomagnetico

