

Legge di Gauss per il campo magnetico

Assenza di cariche magnetiche:

$$\oiint_{\text{sup. chiusa}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Teorema della divergenza:

$$\oiint_{\text{sup. chiusa}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 = \iiint_{\text{volume}} (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV$$

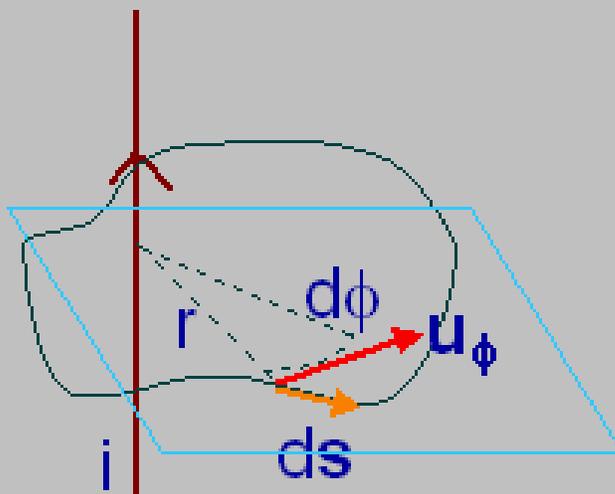
$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Analoga alla legge di Gauss per il campo elettrico

Teorema di Ampere - 1

Filo indefinito:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \rightarrow \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \cdot d\mathbf{s}$$



\mathbf{u}_ϕ : versore tangenziale

$\hat{\mathbf{u}}_\varphi \cdot d\mathbf{s}$: proiezione di $d\mathbf{s}$ lungo $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{u}}_\varphi \cdot d\mathbf{s} = r d\varphi$$

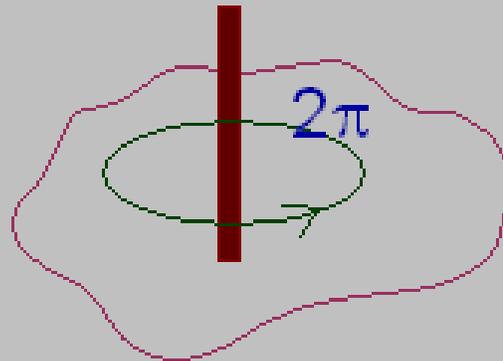
Allora:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi \rightarrow \oint_{\text{curva}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\text{curva}} d\varphi$$

Teorema di Ampere - 2

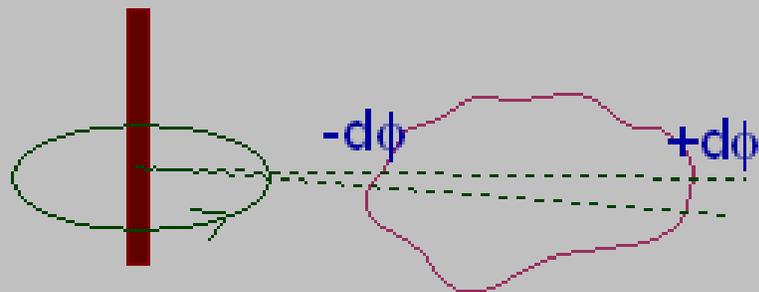
Due possibilita':

1) la curva include il filo



$$\rightarrow \oint_{\text{curva}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\text{curva}} d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$

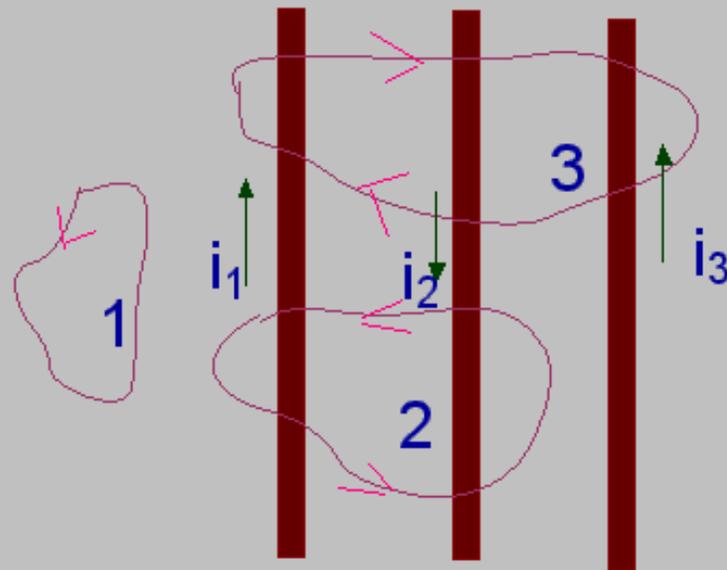
2) la curva non include il filo



$$\rightarrow \oint_{\text{curva}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\text{curva}} d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

Teorema di Ampere - 3

Con distribuzione generica di correnti:



$$\oint_{\text{curva}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k i_k$$

Quindi:

$$\rightarrow \oint_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\rightarrow \oint_2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

$$\rightarrow \oint_3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (-i_1 + i_2 - i_3)$$

Applicazioni - 1

Filo rettilineo indefinito

fuori dal filo:

linea amperiana=cerchio concentrico

$$\rightarrow \oint_{\text{raggio } r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 i$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

dentro al filo:

stessa geometria

$$\rightarrow \oint_{\text{raggio } r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}$$

$$i = j\pi R^2 \rightarrow j = \frac{i}{\pi R^2} \rightarrow I(r) = j\pi r^2 = i \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

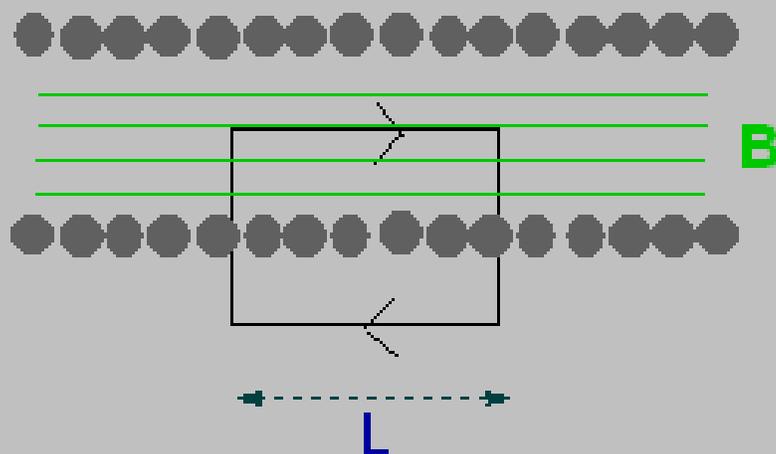
Applicazioni - 2

Solenioide indefinito, n spire/m

Campo parallelo all'asse sui punti dell'asse

Anche per punti fuori dall'asse (si puo' vedere con un argomento sul flusso di \mathbf{B})

Fuori del solenoide campo nullo

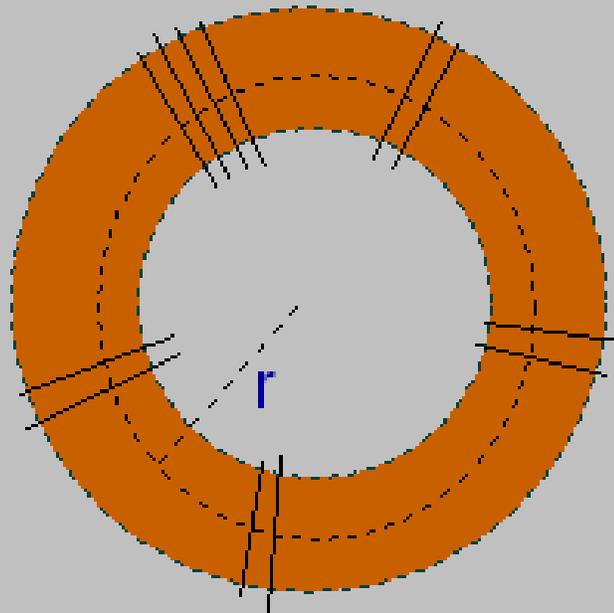


$$\rightarrow \oint_{\text{raggio } r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = BL = \mu_0 nLi$$

$$\rightarrow B = \mu_0 ni$$

Applicazioni - 3

Solenoido toroidale:
N spire in tutto

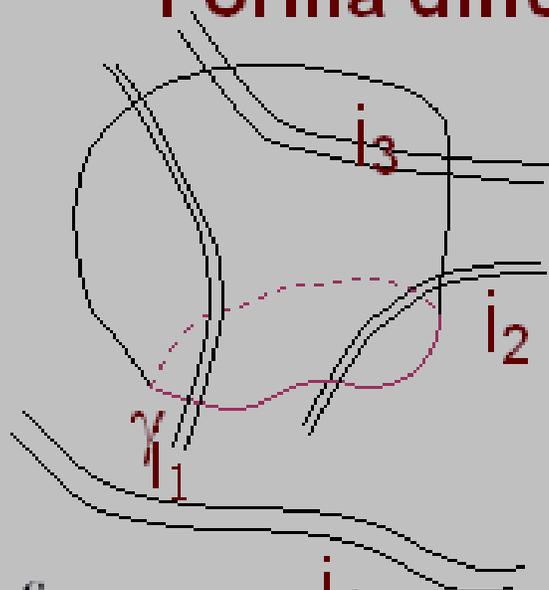


Linea amperiana: cerchio concentrico

$$\rightarrow \oint_{\text{raggio } r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B 2\pi r = \mu_0 i N$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

Teorema di Ampere Forma differenziale



$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$$

i = corrente totale concatenata a γ

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$i_k = \mathbf{j}_k \cdot \Delta \mathbf{S}_k \quad \text{sezione trasversale}$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^n \mathbf{j}_k \cdot \Delta \mathbf{S}_k = \iiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

Teorema del rotore:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Confronto proprietà E e B

Campo irrotazionale: E (*statico*)

Rotore = 0 \rightarrow assenza di vortici \rightarrow *campo di sorgenti*

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Integrale di linea su percorso chiuso = 0; esiste funzione potenziale

Integrale di superficie su sup. chiusa = carica totale contenuta

Sorgente elementare: carica puntiforme

Campo solenoidale: B

Divergenza = 0 \rightarrow assenza di sorgenti/pozzi \rightarrow *campo di vortici*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Integrale di linea su percorso chiuso = vortice concatenato

Integrale di superficie su sup. chiusa = 0

Vortice elementare: corrente filamentare

Potenziale vettore

Analogia (parziale) con campo elettrostatico:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \quad V \text{ funzione scalare}$$

Infatti:

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0, \quad \text{da:}$$

definizione di ∇ + uguaglianza delle derivate seconde miste

Per il campo magnetostatico:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq 0 \rightarrow \text{non esiste } W \text{ t.c. } \mathbf{B} = -\nabla W$$

Tuttavia, $\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0 \rightarrow$ Si puo' sempre scrivere

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \text{ campo vettoriale}$$

Infatti:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0, \quad \text{per } \mathbf{A} \text{ qualsiasi, da:}$$

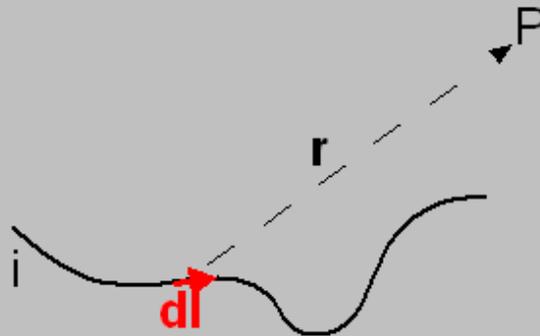
definizione di ∇ + uguaglianza delle derivate seconde miste

**\mathbf{A} = potenziale vettore di \mathbf{B} ,
analogo a V per \mathbf{E}**

**Non usato nel corso, molto
frequente in letteratura**

Potenziale vettore e densita' di corrente

Legame fra \mathbf{A} e correnti: analogo a quello fra V e cariche



Pot. vettore elementare (= quello di un elemento di volume):

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV}{r}, r \text{ distanza fra el. di volume e punto P}$$

Per correnti in conduttori filiformi:

$$\mathbf{j}dV = \rho\mathbf{v}dV$$

$$\rightarrow \mathbf{j}dV = \rho\mathbf{v}dV$$

$$\rightarrow \mathbf{j}dV = dq\mathbf{v} = dq \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} = i d\mathbf{l}$$

$$\rightarrow d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\mathbf{l}}{r}$$

Quindi:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{circuito}} \frac{i}{r} d\mathbf{l}$$