Energia di un sistema di correnti

Sistema di circuiti che esercitano forze reciproche: situazione simile, *ma non identica*, al caso di un sistema di cariche

Forze fra circuiti $\rightarrow$ lavoro necessario per portare i circuiti da distanza ∞ alla configurazione finale

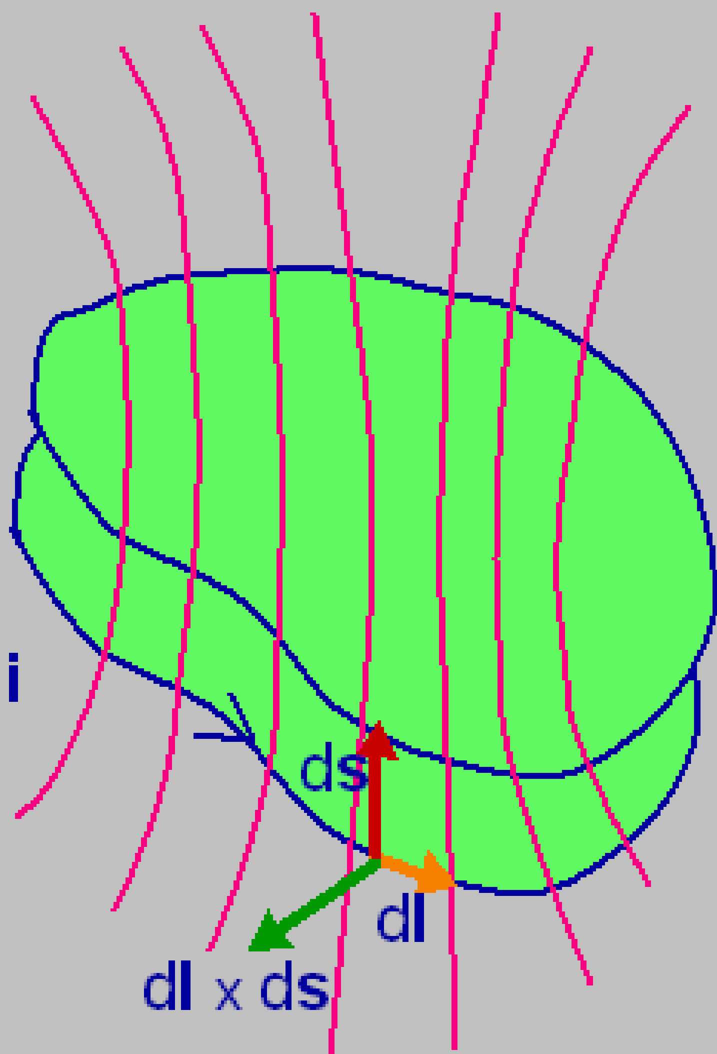
Ma: *il solo atto di stabilire corrente in un circuito richiede lavoro!*

Infatti:

se $R > 0$, occorre lavoro per compensare energia dissipata per effetto Joule

anche se $R = 0$, occorre lavoro per compensare la fem autoindotta mentre I cresce

Energia del campo magnetico -1



Spostamento infinitesimo a corrente costante: **ds**

Lavoro speso:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left(-\int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

Energia del campo magnetico - 2

Proprieta' del doppio prodotto misto:

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -i\int\left(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}\right)\cdot d\mathbf{s} = -i\int\left(d\mathbf{l}\times d\mathbf{s}\right)\cdot\mathbf{B}$$

Diretto secondo la normale alla superficie laterale dello pseudo-cilindro.
Allora:

$$\rightarrow dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = i\int\left(d\mathbf{l}\times d\mathbf{s}\right)\cdot\mathbf{B} = i\Phi_{s.lat}\left(\mathbf{B}\right)$$

$$\rightarrow dL = -id\Phi\left(\mathbf{B}\right) = dU$$

La spira percorsa da corrente, essendo soggetta a una forza quando immersa in un campo esterno, possiede energia potenziale

$$\rightarrow dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = i\int\left(d\mathbf{l}\times d\mathbf{s}\right)\cdot\mathbf{B} = i\Phi_{s.\mathrm{lat}}\left(\mathbf{B}\right)$$

$\Phi_{s.\mathrm{lat}}\left(\mathbf{B}\right)$ e' una quantita' infinitesima

$$\rightarrow \Phi_{s.\mathrm{lat}}\left(\mathbf{B}\right) = d\Phi\left(\mathbf{B}\right)$$

$$\rightarrow dL = id\Phi\left(\mathbf{B}\right)$$

Forza contro-elettromotrice

Legge di Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

In un circuito: fem indotta *si oppone* alla variazione di $\Phi(\boldsymbol{B})$ $\rightarrow$ *la corrente indotta si sottrae alla corrente esistente*

Nei circuiti ci devono essere generatori che lavorino (reversibilmente) contro le fem indotte per stabilire le correnti finali

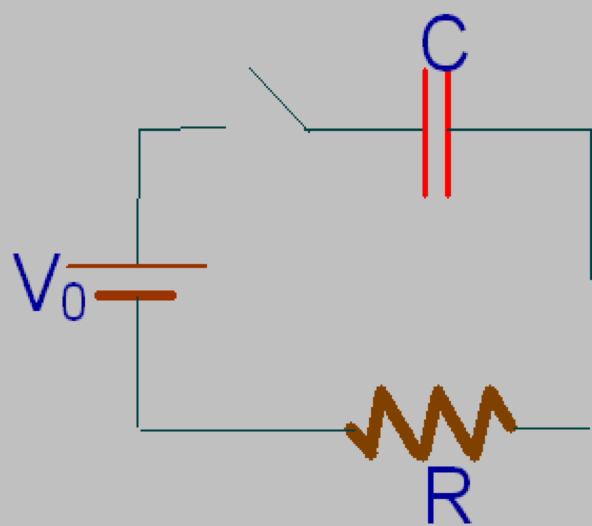
Lavoro reversibile dei generatori = energia potenziale del campo magnetostatico

Lavoro irreversibile = energia dissipata nella resistenza dei circuiti

Si dimostra che, in analogia al caso e-statico:

$$U_B = \iiint\limits_{\substack{\text{tutto}\\ \text{lo spazio}}} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \, dV \ ; \ U_E = \iiint\limits_{\substack{\text{tutto}\\ \text{lo spazio}}} \rho \, V \, dV$$

Carica e scarica di una capacita'



Trascurando campi magnetici variabili

$$\oint_{circuito} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \mathbf{E} \text{ campo elettrico totale}$$

$$\rightarrow V_0 + V_C + V_R = 0$$

Significato:

Dopo la chiusura dell'interruttore nel circuito c'e' corrente variabile
Quindi c'e' flusso variabile di ***B*** attraverso il circuito
Quindi c'e' f.e.m. indotta

Si trascura questa f.e.m., di solito piccola

Carica e scarica di una capacita'

$$V_C(t) + V_R(t) = -V_0$$

$$\rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -\frac{dV_r}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_C = \dfrac{q}{C} \rightarrow \dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{i(t)}{C} \\ V_R = Ri(t) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{i(t)}{C} + R\frac{di}{dt} = 0$$

Eq. differenziale per la funzione incognita *i(t):*

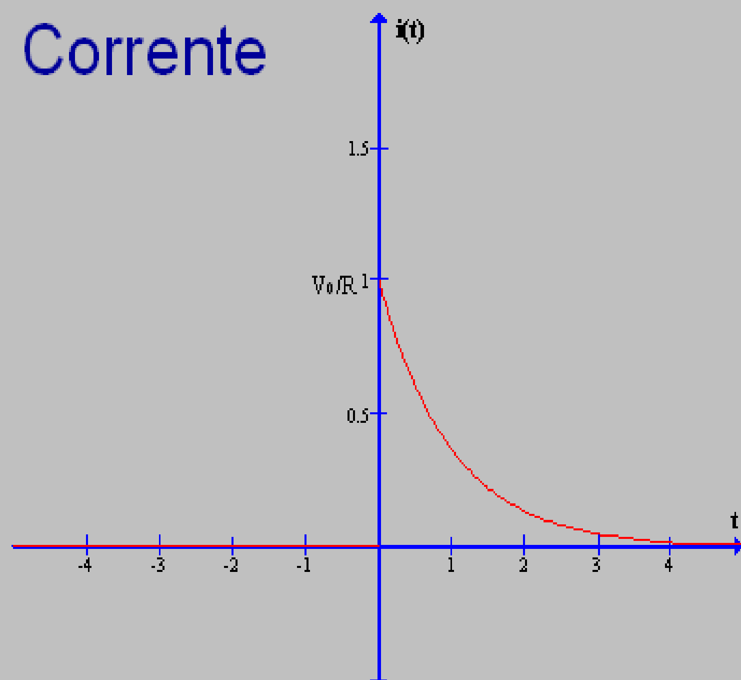
Ordinaria
A coefficienti costanti
Lineare
I ordine
A variabili separabili

Soluzione

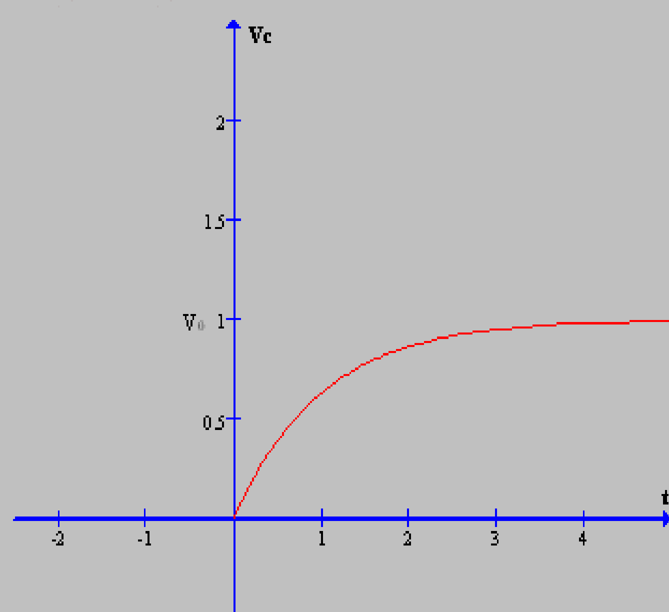
$$i(t) = i_0 e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Corrente e d.d.p.

Corrente



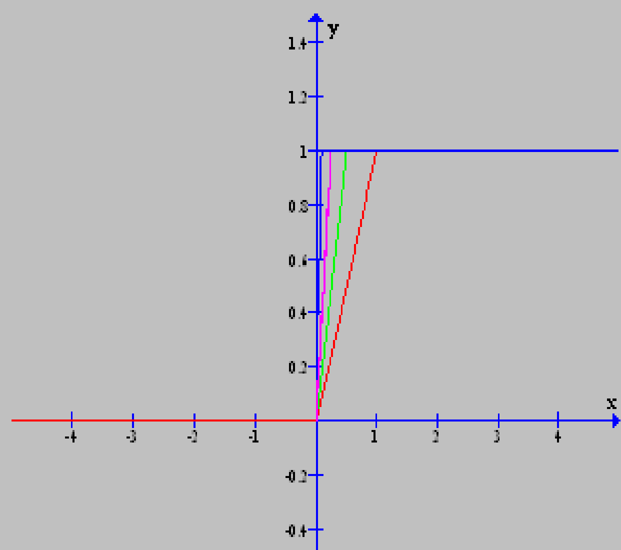
D.d.p. ai capi di C



Osservazione

Soluzione trovata: Discontinua per $t = 0$!
Come puo' ammettere derivata nell'origine?
Risposta semplificata: Non la ammette!

Chiusura interruttore: "Istantanea"
$\rightarrow$Non fisica
Chiusura fisica: "Tempo di transizione finito"
$\rightarrow$Soluzione continua



Chiusura non fisica:
Limite di una successione di chiusure fisiche
Limite di una successione di funzioni continue: Puo' essere discontinuo!

Energia del c.elettrostatico

Potenza istantanea fornita dalla batteria:

$$dL = dQ \cdot V_0 \quad \text{carica trasferita x d.d.potenziale}$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot V_0 = i(t) V_0 = V_0 \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Energia totale spesa dalla batteria:

$$E = \int_0^\infty P(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_0^2}{R}(-RC) e^{-t/RC}\Big|_0^\infty$$

$$\rightarrow E = CV_o^2$$

Potenza dissipata nella resistenza:

$$P = V_R i(t) = Ri^2(t) \rightarrow P = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

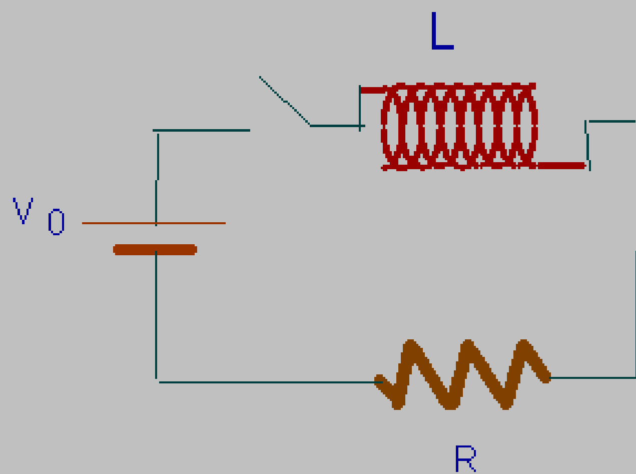
En. totale dissipata in R:

$$E_R = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{V_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right) e^{-2t/RC}\Big|_0^\infty$$

$$E_R = \frac{1}{2} CV_0^2 \rightarrow E - E_R = \frac{1}{2} CV_0^2$$

Differenza: en. immagazzinata nel c. elettrostatico del condensatore

"Carica" di un'induttanza



$$\oint_{circuito} E \cdot ds = Ri(t) = \text{f.e.m. totale}$$

Se si trascurano i campi magnetici:

$$V_0 + V_L(t) = Ri(t)$$

$$\rightarrow Ri(t) - V_L(t) = V_0$$

$$V_L(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\rightarrow Ri(t) + L\frac{di}{dt} = V_0$$

Eq. differenziale per la funzione incognita *i(t)*
Soluzione:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$

Energia del c.magnetico

Potenza istantanea fornita dal generatore:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$

$$\rightarrow P = V_0 i(t) = \frac{V_0^2}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$

Potenza dissipata nella resistenza:

$$P = R^2 i(t) = \frac{V_0^2}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)^2$$

$$= \frac{V_0^2}{R}\left(1 + e^{-2tR/L} - 2e^{-tR/L}\right)$$

Differenza

$$\Delta P = \frac{V_0^2}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right) - \frac{V_0^2}{R}\left(1 + e^{-2tR/L} - 2e^{-tR/L}\right)$$

$$= \frac{V_0^2}{R}\left(e^{-tR/L} - e^{-2tR/L}\right)$$

En. totale nel campo magnetico:

$$E = \int_0^\infty \Delta p dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty \left(e^{-tR/L} - e^{-2tR/L}\right) dt$$

$$= \frac{V_0^2}{R}\frac{L}{R} - \frac{V_0^2}{R}\frac{L}{2R} = \frac{V_0^2}{R^2}L - \frac{V_0^2}{2R^2}L = \frac{1}{2}Li^2(\infty)$$

Densita' di energia

Casi particolari (ma il risultato vale in generale...) per la *densita' volumetrica di energia* immagazzinata nel campo:

Condensatore piano

Area =A, distanza = d

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2$$

$$u_E = \frac{U_E}{volume} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2}{volume} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Solenoide infinito

Area = A, lunghezza = l

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{l}i^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 Al$$

$$u_B = \frac{U_B}{volume} = \frac{\frac{1}{2\mu_0}B^2 Al}{volume} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$